



华图金领人
HUATU.COM

2020

考研数学
考场点题



HUATU
EDUCATION

目 录

2020 考研数学重难点题型精编.....	2
附 1：2020 考研数学知识点重要等级汇总.....	9
附 2：2020 考研数学重要定理、结论汇总.....	14

华图教育

2020 考研数学重难点题型

1、数列极限

- 1) 夹逼定理（填空为主）
- 2) 单调有界定理（结合中值定理）
- 3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 收敛等价于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

【例】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，若 $a \leq f(x) \leq b$ ， $x \in [a, b]$ 且 $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ ，其中 k 为常数， $0 < k < 1$ ，设 $x_n \in [a, b]$ ， $x_{n+1} = f(x_n)$ ， $n = 1, 2, \dots$

证明：（1）存在唯一 $\xi \in [a, b]$ ，使得 $\xi = f(\xi)$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$$

【解析】（1）令 $F(x) = x - f(x)$ ，则有 $F(a) = a - f(a) \leq 0$ ， $F(b) = b - f(b) \geq 0$

由介值性定理可得，至少存在一个 $\xi \in [a, b]$ ，使得 $F(\xi) = 0$ ，即 $\xi = f(\xi)$ ；

反证唯一性：若存在两个不同的点 $\xi_1 \neq \xi_2 \in [a, b]$ ，使得 $\xi_1 = f(\xi_1)$ ， $\xi_2 = f(\xi_2)$

则有 $|\xi_1 - \xi_2| = |f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq k|\xi_1 - \xi_2|$ ，可得 $k \geq 1$ 与已知 $0 < k < 1$ 矛盾，

故存在唯一的 $\xi \in [a, b]$ ，使得 $\xi = f(\xi)$ 。

$$(2) \text{ 由已知可得： } |x_n - \xi| = |f(x_{n-1}) - f(\xi)| \leq k|x_{n-1} - \xi| \leq \dots \leq k^{n-1}|x_1 - \xi| \rightarrow 0 \quad (0 < k < 1)$$

故有： $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$

2、函数极限

1) 等价无穷小（常见的等价无穷小）

① 单一函数情形：当 $x \rightarrow 0$ 时，有：

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, e^x - 1 \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x (\alpha \neq 0), \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \sim x, a^x - 1 = e^{x \ln a} - 1 \sim x \ln a;$$

$$\log_a^{(1+x)} = \frac{\ln(1+x)}{\ln a} \sim \frac{x}{\ln a}.$$

② 两函数差情形：当 $x \rightarrow 0$ 时，有：

$$x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}, x - \ln(x+1) \sim \frac{x^2}{2}, \tan x - x \sim \frac{x^3}{3}, \tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}, \arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6}$$

$$x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$$

2) 洛必达法则（注意条件）

3、间断点及类型（第一类、第二类）

4、导数的运算（定义、几何意义、链式法则、隐函数求导）

【例】设 $f'(0)=1$, α, β 为常数且 $\alpha \cdot \beta \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\alpha \sin x) - f(\beta \sin x)}{x} = (\quad)$

- (A) $\alpha + \beta$ (B) $\alpha - \beta$ (C) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ (D) $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$

【答案】B (定义直接得到)

5、高阶导数 (关注莱布尼兹公式)

【例】设 $f(x) = (x^2 - 1)^{2019}$, 则下列结论中不正确的是 ()

- (A) $f^{(2019)}(0) = 0$ (B) $f^{(2019)}(1) + f^{(2019)}(-1) = 0$
(C) $f^{(2019)}(1) - f^{(2019)}(-1) = 0$ (D) $f^{(2019)}(1) - f^{(2019)}(-1) = 2019! \cdot 2^{2020}$

【答案】C

6、微分中值定理 (重点关注罗尔定理、拉格朗日中值定理和泰勒公式)

【例 1】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$,

证明: (1) 在 $(0, 1)$ 内存在两个不同的点 ξ, η , 使得: $\frac{20}{f'(\xi)} + \frac{2000}{f'(\eta)} = 2020$.

(2) 在 $(0, 1)$ 内存在两个不同的点 ξ, η , 使得: $20f'(\xi) + 2000f'(\eta) = 2020$.

【提示】先使用介值性定理, 再使用拉格朗日中值定理

【例 2】设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可导, 且 $a < c < b$, $\int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx = 0$

(1) 证明: 存在 $\xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b)$, 使得 $f(\xi_1) = \int_a^{\xi_1} f(x) dx, f(\xi_2) = \int_a^{\xi_2} f(x) dx$,

(2) 证明: 存在 $\eta \in (a, b)$, 使得 $f'(\eta) = \int_a^\eta f(x) dx$

【提示】使用罗尔中值定理

7、积分计算

8、积分应用 (面积、体积)

【例】求由曲线 $y = 4 - x^2$ 及 $y = 0$ 所围成的图形绕直线 $x = 3$ 旋转一周所得旋转体的体积.

【解析】法一: $V = 2\pi \int_{-2}^2 (3-x)(4-x^2) dx = 64\pi$

法二: $V = 2\pi \int_{-5}^{-1} |x| [4 - (x+3)^2] dx = 64\pi$

法三: $V = \pi \int_0^4 [(3 + \sqrt{4-y})^2 - (3 - \sqrt{4-y})^2] dy = 12\pi \int_0^4 \sqrt{4-y} dy = 64\pi$

9、微分方程 (一阶方程关注选择填空, 二阶线性方程重点关注解答题与积分相关应用)

10、多元函数微分学 (极值最值, 偏导数与全微分计算; 关注: 复合函数、隐函数)

【例 15】设函数 $z = z(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 变换 $u = ax + y, v = x + by$, 把方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 试求 a, b 的值

【答案】 $a = \frac{1}{2}, b = -2$ 或 $a = -\frac{1}{2}, b = 2$

离

【例 16】 在平面直角坐标系中，求椭圆 $C: x^2 + 2xy + 5y^2 - 16y = 0$ 与直线 $L: x + y - 8 = 0$ 的最短距

【答案】 $2\sqrt{2}$

【例 17】 求函数 $f(x, y) = x^2 + \sqrt{2}xy + 2y^2$ 在闭区域 $D = \{(x, y) | x^2 + 2y^2 \leq 4\}$ 上的最大值与最小值

【答案】 6 和 0

11、重积分（二重积分-数二数三，关注计算计算和交换次序；三重积分数一关注计算）

【例 18】 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} 2 & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$ ，其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

(1) 求函数 $F(t) = \iint_{x+y \leq t} f(x, y) dx dy$

(2) 判断函数 $F(t)$ 是否连续，若有间断点请指出类型

【答案】 (1) $F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^2, & 0 \leq t < 1 \\ -t^2 + 4t - 2, & 1 \leq t < 2 \\ 2, & 2 \leq t \end{cases}$ (2) 连续

【例 19】 设区域 $D: \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

计算二重积分 $I = \iint_D [x+y] \ln \frac{y+1}{x+1} dx dy$ ，其中 $[\cdot]$ 为取整函数

【答案】 0

【例 20】 设 D 为 $y = -x (y \geq 0)$, $y = \sqrt{2-x^2}$, x 正半轴所围部分，计算二重积分

$$I = \iint_D \min\{x, y\} |x^2 + y^2 - 1| dx dy$$

【答案】 $\frac{2}{15}$

12、无穷级数（数项级数关注选择，幂级数求和重点是解答题，数一傅里叶级数关注填空）

【例 21】 设 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，对任意实数 x ，有 $g(x+1) = g(x)$ ，且 $\int_0^1 g(x) dx = 0$ ，而 $f(x)$

在 $[0, 1]$ 上有连续的导数，记 $a_n = \int_0^1 f(x) g(nx) dx$

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛

【提示】 比较判别法

【例 22】 设 $a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = \frac{7}{2}, a_{n+1} = -\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) a_n \quad (n \geq 2)$

(1) 证明：当 $|x| < 1$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛

(2) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$

【答案】 $s(x) = \frac{1}{(1+x)^2} (\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1)$, $x \in (-1, 1)$

13、曲线曲面积分（重点关注格林公式和高斯公式尤其是高斯公式，散度旋度填空看看）

【例 23 数一】计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^2 z dy dz + y^2 dz dx + (z^2 - x) dx dy$ ，其中 Σ 是由 $yo z$ 平面上的曲线

$z = e^y (0 \leq y \leq 1)$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面，取下侧。

【答案】 $\pi(1 - e^2)$

【练习数一】设函数 $u(x, y)$ 在有界闭区域 D 上有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in D$

记 D 的正向边界曲线为 ∂D ， ∂D 的外法线向量为 n ，若当 $(x, y) \in \partial D$ 时， $u(x, y) = A$

(1) 求曲线积分 $\oint_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} ds$ 的值；

(2) 证明： $u(x, y) = A, (x, y) \in D$

【答案】 0

【例 24 数一】设曲线 L 的方程为 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$ ，则积分 $\oint_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}) ds =$ _____

【答案】 $4a^{\frac{7}{3}}$

【线性代数】

1、行列式与矩阵（行列式以 4 阶数字型为主，填空题涉及特征值相关理论；矩阵以伴随、逆、秩和初等变换为主）

【例 25】设 A, B, A^* 都是 $n (n \geq 3)$ 阶非零矩阵，且 $A^T B = O$ ，则 $r(B) =$ ()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【答案】 B

【练习】设 A 是 3 阶非零矩阵，满足 $A^2 = O$ ，若线性非齐次方程组 $Ax = b$ 有解，则其线性无关解向量的个数是 ()

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【答案】 C

2、向量组（线性相关与无关判定，极大无关组与秩）

3、线性方程组求解（非齐次与公共解）

4、特征值与对角化（特征值和矩阵相似关于客观题，对角化理论关注与实对称矩阵结合）

5、二次型理论（二次型化为标准型是重点，合同与正定性）

【例 26】设 A 为 $m \times n$ 矩阵， $m \neq n$ ， b 为 m 维列向量，则下列结论中正确的个数是 ()

① 若 $r(A) = n$ ，则 $Ax = b$ 必有解

② 若 $r(A) = m$ ，则 $Ax = b$ 必有解

③ $Ax = 0$ 与 $A^T Ax = 0$ 必同解

④ $A^T Ax = A^T b$ 必有解

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【答案】D

【例 27】设 A 为 n 阶方阵，且 $r(A) = s$ ， β 为 n 维列向量，已知方程组 $Ax = 0$ 与方程组 $\beta^T x = 1$ 没有公共解，则 ()

- (A) $r \begin{pmatrix} A \\ \beta^T \end{pmatrix} = s$ (B) $r \begin{pmatrix} A \\ \beta^T \end{pmatrix} > s + 1$ (C) $r \begin{pmatrix} A \\ \beta^T \end{pmatrix} = s + 1$ (D) 无法判断

【答案】A

【例 28】设齐次线性方程组 (1) 为
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + bx_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_4 = 0 \end{cases}$$
，又已知齐次线性方程组 (2) 的基础解系为

$\alpha_1 = (0, 1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 2, 2, 1)^T$ ，试问 a, b 为何值时，(1) 与 (2) 有非零公共解？并求出所有的非零公共解。

【答案】(1) $a = -1, b = 0$ (2) $x = k(-1, 1, 1, 1)^T (k \neq 0)$

【例 29】已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 有特征向量 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

(1) 证明 $r(A) = 2$

(2) 求 $Ax = \xi_3$ 的通解

【答案】(1) 略 (2) $x = k\xi_1 - \frac{1}{3}\xi_3 \quad \forall k \in R$

【例 30】已知三元二次型 $x^T Ax$ 的平方项系数为 0，且 $\alpha = (1, 2, -1)^T$ 满足 $A\alpha = 2\alpha$

(1) 求该二次型的表达式

(2) 求出正交变换下的二次型的标准型

(3) 若 $A^3 + 2A^2 - 4A + kE$ 正定，求 k 的范围

【答案】(1) $f = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ (2) $f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$ (3) $k > 16$

【例 31】已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)^2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)^2$$

$$\text{记 } x = (x_1, x_2, x_3)^T, \alpha = (a_{11}, a_{12}, a_{13})^T, \beta = (a_{21}, a_{22}, a_{23})^T, \gamma = (a_{31}, a_{32}, a_{33})^T$$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵是 $\alpha\alpha^T + \beta\beta^T + \gamma\gamma^T$

(2) 若矩阵 $A = (\alpha, \beta, \gamma)$ 为正交矩阵，证明 f 在正交变换下的标准型为 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

(3) 若矩阵 $A = (\alpha, \beta, \gamma)$ 为可逆矩阵，证明二次型 f 为正定二次型

【答案】略

【概率统计】

1、一维随机变量（常见分布计算概率，随机变量函数的分布）

【例 32】 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X = n\} = \frac{k}{n^2 - 1}, n = 2, 3, 4, \dots$ 其中 k 为常数, 则反常积分

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^{X-2} t} dt$ 收敛的概率为()

- (A) $\frac{3k}{4}$ (B) $\frac{11k}{24}$ (C) $\frac{7}{18}$ (D) $\frac{1}{2}$

【答案】 C

【例 33】 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $X \sim B(1, p)$ 的简单随机样本, p 为未知参数, \bar{X} 为样本均值,

则 $P\left\{\bar{X} = \frac{2}{n}\right\} = ()$

- (A) p (B) $1-p$ (C) $C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2}$ (D) $C_n^2 p^{n-2} (1-p)^2$

【答案】 C

【例 34】 设 X 为随机变量, s, t 为正数, m, n 为正整数, 下列结论中正确的个数为()

① 若 $X \sim E(\lambda)$, 则 $P\{X > s+t | X > s\}$ 与 s 无关;

② 若 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$, 则当 $t > 1$ 时, $P\{X \geq 2t | X \geq t\}$ 与 t 无关;

③ 若 $X \sim Ge(p)$, 则 $P\{X > m+n | X > m\}$ 与 m 无关;

④ 若 X 的分布律为 $P\{X = k\} = \frac{1}{k(k+1)}, k = 1, 2, \dots$, 则 $P\{X \geq 2n | X \geq n\}$ 与 n 无关;

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【答案】 D

2、二维随机变量 (联合、边缘、条件分布、独立性; 随机变量函数的分布与二维正态均匀分布)

3、随机变量的期望、方差、协方差、相关系数

4、三大分布与正态总体的抽样分布、数字特征

5、矩估计与最大似然估计

【例 35 数一】 已知在检验假设 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$ 时出现了第一类错误, 则表明()

- (A) $\mu = \mu_0$ 为真, 但接受了 $\mu < \mu_0$ (B) $\mu < \mu_0$ 为真, 但接受了 $\mu = \mu_0$
(C) $\mu \geq \mu_0$ 为真, 但接受了 $\mu < \mu_0$ (D) $\mu < \mu_0$ 为真, 但接受了 $\mu \geq \mu_0$

【答案】 C

【练习数一】 检验显著水平是 ()

- (A) 第一类错误的概率 (B) 第一类错误的概率上界
(C) 第二类错误的概率 (D) 第二类错误的概率上界

【答案】 B

【例 36】 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 X 服从参数为 λ 的指数分布, Y 服从参数为 μ 的指数分布

(1) 求 $U = \max(X, Y)$ 的概率密度 $f_U(\mu)$

(2) 求 $V = \min(X, Y)$ 的概率密度 $f_V(v)$

(3) 求数学期望 $E(UV)$

【答案】(1) $f_U(u) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda u} + \mu e^{-\mu u} - (\lambda + \mu)e^{-(\lambda + \mu)u}, & u > 0 \\ 0, & u \leq 0 \end{cases}$

(2) $f_V(v) = \begin{cases} (\lambda + \mu)e^{-(\lambda + \mu)v}, & v > 0 \\ 0, & v \leq 0 \end{cases}$ (3) $\frac{1}{\lambda\mu}$

【例 37】设 $X \sim U[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$

(1) 求 $D[X]$;

(2) 求 $D(X - [X])$

(3) 求 X 与 $[X]$ 的相关系数 ρ , 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

【答案】(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{12}$ (3) $\frac{3\sqrt{6}}{8}$

【例 38】设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布, Y 服从参数为 1 的指数分布.

(1) 求概率 $P\{X+Y \leq 1\}$

(2) 令 $Z = \frac{Y}{X}$, 求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$

【答案】(1) $\frac{1}{e}$ (2) $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{z^2}(1 - e^{-z}) - \frac{1}{z}e^{-z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$

【例 39】设总体 X 的概率密度函数为 $f(x; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^3}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本

(1) 求 EX 和 $E(X^2)$

(2) 利用原点矩求 σ^2 的矩估计量 $\widehat{\sigma^2}_M$, 并求 $E(\widehat{\sigma^2}_M)$

【答案】(1) $EX = 0; EX^2 = 3\sigma^2$ (2) $\widehat{\sigma^2}_M = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n X_i^2, E(\widehat{\sigma^2}_M) = \sigma^2$

【例 40】设总体 X 的概率密度函数为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2}{3\theta^2}(2\theta - x), & 0 < x \leq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体

X 的简单随机样本

(1) 求 θ 的矩估计量 $\widehat{\theta}_M$ (2) 求 θ 的极大似然估计量 $\widehat{\theta}_L$

【答案】(1) $\widehat{\theta}_M = \frac{9}{4}\bar{X}$ (2) $\widehat{\theta}_L = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

附 1: 2020 考研数学知识点重要等级汇总

数学一

科目	大纲章节	知识点	题型	重要等级	重点考查形式
高等数学	第一章 函数、极限、连续	极限存在的两个准则	求数列（或函数）的极限	★★★★★	解答题
		无穷小与间断	无穷小、间断点类型	★★★	客观题
	第二章 一元函数微分学	函数的渐近线与拐点	求曲线的渐近线与拐点	★★★	客观题
		罗尔定理、拉格朗日中值定理和泰勒公式	等式、不等式的证明	★★★★★	解答题
		曲率	求曲率、曲率圆、曲率半径	★	客观为主
	第三章 一元函数积分学	定积分的概念和性质	定积分等式、不等式的证明	★★★★★	解答
		反常积分	计算反常积分敛散性	★★★	客观
		定积分应用	面积、体积、侧面积、弧长	★★★	客观或解答
	第四章 向量代数和空间解析几何	球面、柱面、旋转曲面、二次曲面，空间曲线	会求空间曲线在坐标平面上的投影及旋转曲面方程	★	客观
	第五章 多元函数微分学	空间曲线的切线和法平面、曲面的切平面和法线	求空间曲线的切线和法平面、曲面的切平面和法线	★	客观
		多元复合函数、隐函数的求导法	偏导数，全微分	★★★★★	客观或解答
		极值与最值	一般/条件极值、最值	★★★★★	解答
	第六章 多元函数积分学	二重积分的概念、性质及计算	三重积分的概念、性质及计算	★★★	填空或解答
		三重积分的概念、性质及计算	三重积分的概念、性质及计算	★★	填空或解答
		重积分的应用	面积、体积、质量与转动惯量	★	客观
		第一类曲线积分的性质及计算、第二类曲线积分的性质及计算	计算第一类曲线积分和第二类曲线积分	★★★★★	客观或解答
		第一类、第二类曲面积分	计算第一类曲面（客观）； 计算第二类曲面（解答）	★★★★★	客观或解答
	第七章 无穷级数	正项级数与交错级数	正项级数敛散性的判定	★★★★★	客观或解答
		幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域； 幂级数的求和与展开	求幂级数的收敛半径、收敛区间或收敛域及和函数	★★★★★	解答
	第八章 常微分方程	一阶、二阶线性微分方程	一阶方程求解、二阶方程解	★★★	客观或解答
可降阶的高阶微分方程、二阶线性方程		计算可降阶的高阶微分方程、二阶线性方程的求解	★★★	客观或解答	
第一章 行列式	行列式的运算	计算数字型行列式	★★★	客观或解答	

线性	第二章 矩阵	分块矩阵	利用分块矩阵计算矩阵的行列式或求分块矩阵的逆	★★	客观或解答
		初等矩阵、矩阵方程	初等/伴随矩阵矩阵相关性质、求解矩阵方程	★★★	客观或解答
代数	第三章 向量	向量组等价与矩阵等价	向量组等价与矩阵等价的区别和联系	★★★	选择
	第四章 线性方程组	非齐次方程组	非齐次方程组解的结构与求解	★★★★	客观或解答
		公共解与同解	判断两个方程组是否同解或是否有公共解,若有,求解	★★★	解答
		基础解系	证明一个向量组为基础解系	★★★	解答
	第五章 矩阵的特征值和特征向量	特征值与特征向量	概念、性质与相关计算	★★★	客观
		相似矩阵	与两矩阵相似有关的计算	★★★★	选择或解答
	第六章 二次型	二次型的标准型与规范型	化二次型为标准型	★★★★	客观或解答
		正定二次型和正定矩阵	二次型或矩阵正定的判定和证明	★★★	客观或解答
概率论与数理统计	第一章 随机事件和概率	五大公式与独立性	乘法公式与全概率公式、条件概率	★★	客观或解答
	第二章 随机变量及其分布	一维随机变量函数的分布	一维随机变量函数的分布	★★★	客观或解答
	第三章 多维随机变量及其分布	二维离散型随机变量的分布	二维离散型随机变量的分布	★★★	客观或解答
		二维连续型随机变量的边缘分布、条件分布	二维连续型随机变量的边缘分布、条件分布	★★★★★	解答
		随机变量函数的分布	和、差、积、商的分布	★★★	解答
	第四章 随机变量的数字特征	随机变量函数的数学期望和方差	有关数学期望与方差的计算	★★★★	客观或解答
	第五章 大数定律中心极限定理	大数定律的条件和结论,中心极限定理	大数定律的判定,中心极限定理的应用	★	客观
	第六章 数理统计的基本概念	三大分布 (χ^2, T, F)	分布模型、期望与分位数	★★	客观
		正态总体的抽样	单正态总体的抽样分布	★★★	客观或解答
	第七章 参数估计	矩估计法和最大似然估计法,估计量的无偏性	求参数的矩估计和最大似然估计、无偏性与有效性	★★★★★	解答
第八章 假设检验	单个正态总体均值的假设检验	单个正态总体均值的假设检验的计算	★	客观	

数学二

科目	大纲章节	知识点	题型	重要等级	重点考查形式
高等数学	第一章 函数、极限、连续	极限存在的两个准则	求数列（或函数）的极限	★★★★★	客观或解答
		无穷小与间断	已知极限求参数、间断点类型	★★★★★	客观或解答
	第二章 一元函数微分学	函数的渐近线与拐点	求曲线的渐近线与拐点	★★★★★	客观
		闭区间上连续函数的性质、罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒定理	微分中值定理及其应用	★★★★★	解答
		曲率	求曲率、曲率圆、曲率半径	★★★	客观题为主
	第三章 一元函数积分学	定积分的概念和性质	定积分等式、不等式的证明	★★★★★	解答
		反常积分	计算反常积分	★★★	客观
		定积分应用	面积、体积、侧面积、弧长、水压力、引力	★★★★★	客观或解答
	第四章 多元函数微分学	多元复合函数、隐函数的求导法、极值	求偏导数，全微分、极值最值	★★★★★	客观或解答
	第五章 二重积分	二重积分的计算	交换次序、积分计算与简化运算	★★★★★	客观或解答
	第六章 常微分方程	一阶方程、二阶方程	一阶方程、二阶方程的求解	★★★★★	客观或解答
		可降阶的高阶微分方程	计算可降阶的高阶微分方程	★★★	客观或解答
微分方程的应用		与面积、体积、曲率、偏导数结合	★★★	解答	
线性代数	第一章 行列式	行列式的运算	计算数字型行列式	★★	客观或解答
	第二章 矩阵	分块矩阵	利用分块矩阵计算矩阵的行列式或求分块矩阵的逆	★★★★★	解答
		伴随矩阵、初等矩阵	初等矩阵、伴随矩阵及矩阵方程	★★	选择或解答
	第三章 向量	向量组等价与矩阵等价	向量组等价与矩阵等价	★★★★★	选择
	第四章 线性方程组	齐次、非齐次方程组	齐次、非齐次方程组解的结构与求解	★★★★★	客观或解答
		同解与公共解	判断两个方程组是否同解或是否有公共解，若有，求解	★★★★★	解答
		基础解系	证明一个向量组为基础解系	★★★★★	客观或解答
	第五章 矩阵的特征值和特征向量	特征值与特征向量	概念、性质与相关计算	★★★	客观
		相似矩阵	与两矩阵相似有关的计算	★★★	客观或解答
	第六章 二次型	二次型的标准型	化二次型为标准型（规范型）	★★★★★	客观或解答
正定二次型和正定矩阵		二次型/矩阵正定判定和证明	★★	客观或解答	

数学三

科目	大纲章节	知识点	题型	重要等级	重点考查形式
高等数学	第一章 函数、极限、连续	极限存在的两个准则	求函数（或数列）的极限	★★★	解答
		无穷小与间断点	参数有关极限、间断点类型	★★	客观
	第二章 一元函数微分学	函数的渐近线与拐点	求曲线的渐近线与拐点	★★★★★	客观
		闭区间上连续函数的性质、罗尔定理、拉格朗日中值定理和泰勒定理	等式、不等式的证明	★★★★★	解答
		导数的经济应用	边际与弹性	★★★★★	客观或解答
	第三章 一元函数积分学	定积分的概念和性质	定积分等式、不等式的证明	★★★★★	解答
		反常积分	计算反常积分	★★★	客观
		定积分应用	面积、体积	★★★★★	客观或解答
	第四章 多元函数微分学	多元复合函数、隐函数的求导法	求偏导数，全微分	★★★★★	客观或解答
		极值与最值	一般极值、条件极值与最值	★★★★★	解答
	第五章 二重积分	交换次序与计算	直角坐标、极坐标与无界区域上的反常二重积分的计算	★★★★★	客观或解答
	第六章 无穷级数	正项级数与交错级数	正项级数敛散性的判定	★★★	客观
		幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域，简单幂级数和函数的求法	求幂级数的收敛半径、收敛区间或收敛域及和函数	★★★★★	客观或解答
	第七章 常微分方程	一阶、二阶线性微分方程	一阶方程求解、二阶方程解	★★★	客观或解答
一阶常系数线性差分		求一阶常系数线性差分方程的通解与特解	★	客观	
线性代数	第一章 行列式	行列式的运算	计算数字型行列式	★★	客观或解答
	第二章 矩阵	分块矩阵	利用分块矩阵计算矩阵的行列式或求分块矩阵的逆	★★	客观或解答
		伴随矩阵、初等变换	初等矩阵、伴随矩阵及矩阵方程	★★★	客观或解答
	第三章 向量	向量组等价与矩阵等价	向量组等价与矩阵等价	★★	选择
	第四章 线性方程组	非齐次方程组的求解	通解的求解	★★★★★	解答
		同解与公共解	判断两个方程组是否同解或是否有公共解，若有，求解	★★★★★	解答
	第五章 矩阵的特征值和特征向量	相似矩阵	与两矩阵相似有关的计算	★★★	选择或解答
		矩阵特征值的概念、性质	求抽象矩阵的特征值	★★★★★	客观或解答
第六章 二次型	标准型与规范型	二次型化标准型（实对称矩阵化对角形）	★★★★★	客观或解答	

		正定二次型和正定矩阵	二次型或矩阵正定的判定和证明	★★★	客观或解答
概率 论与 数理 统计	第一章 随机事件和概率	五大公式与独立性	乘法公式与全概率公式、条件概率	★★	客观或解答
	第二章 随机变量及其分布	一维随机变量函数的分布	一维随机变量函数的分布	★★★★	客观或解答
	第三章 多维随机变量及其分布	二维离散型随机变量的分布	二维离散型随机变量的分布	★★★★★	解答
		二维连续型随机变量的边缘分布、条件分布	二维连续型随机变量的边缘分布、条件分布	★★★★★	客观或解答
		随机变量函数的分布	最值、和、差、积、商的分布	★★★★	解答
	第四章 随机变量的数字特征	随机变量函数的数学期望和方差	有关数学期望与方差的计算	★★★★★	客观
	第五章 大数定律和中心极限定理	中心极限定理	计算 n 个随机变量之和的极限分布	★	客观
	第六章 数理统计的基本概念	三大分布 (χ^2, T, F 分布)	分布模型、期望与分位数	★★★★	客观
		正态总体的抽样	单正态总体的抽样分布	★★★★★	客观或解答
第七章 参数估计	矩估计和最大似然估计	求参数的矩估计和最大似然估计	★★★★★	客观或解答	

附 2：2020 考研数学重要定理、结论汇总

理论三：导数极限定理（2009 数一）

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内连续，在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内可导，且极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$

【证明】(1) 任取 $x \in U_+(x_0)$ ， $f(x)$ 在 $[x_0, x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，则存在 $\xi \in (x_0, x)$ ，使得 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$

由于 $x_0 < \xi < x$ ，因此当 $x \rightarrow x_0^+$ 时，随之有 $\xi \rightarrow x_0^+$ ，

两边取极限得： $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x_0^+} f'(\xi) = f'(x_0 + 0)$

即： $f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0)$

(2) 同理可得： $f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0)$

又因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = k$ 存在，故 $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = k$ ，

从而 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = k$ ，即 $f'(x_0) = k$

【备注】 导数极限定理适合于用来求分段函数的导数。

理论四：导函数两个特性

1. 导函数没有第一类间断点

设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内处处有导数 $f'(x)$ ，则 (a, b) 中的点或为 $f'(x)$ 的连续点，或为 $f'(x)$ 的第二类间断点。

【证明】 上述结论等价于“导函数不存在第一类间断点”，下面采用反证法来证明：

假设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上可导，且 $x_0 \in (a, b)$ 是 $f'(x)$ 的第一类间断点，

则有 $f'(x_0 + 0), f'(x_0 - 0)$ 均存在，

由导数极限定理可得： $f'_+(x_0)$ 也存在，且 $f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0)$ ，

同理可得： $f'_-(x_0)$ 也存在，且 $f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0)$ ，

因为 $f(x)$ 在 x_0 处可导，故有 $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$ ，

所以有 $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$ ，

即 $f'(x)$ 在 x_0 处连续，与假设矛盾，故 $f'(x)$ 在区间 (a, b) 上不存在第一类间断点。

【备注】所谓导数无第一类间断，是在导数处处存在的前提下讲的。如 $f(x) = |x|$ ，当 $x < 0$ 时， $f'(x) = -1$ ；当 $x > 0$ 时， $f'(x) = 1$ ，在 $x = 0$ 处便是第一类间断，但这与我们的结论不矛盾，因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导。

2. 导函数具有介值性 (G.Darboux 定理)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上处处可导 (端点指单侧导数)， $f'(a) < f'(b)$ ，则 $\forall c: f'(a) < c < f'(b)$ ， $\exists \xi \in (a, b)$ ，使得 $f'(\xi) = c$

【证明】作辅助函数 $g(x) = f(x) - cx$ ，则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上处处可导，且 $g'(a) = f'(a) - c < 0$ ， $g'(b) = f'(b) - c > 0$ ，只要能证明 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $g'(\xi) = 0$ ，即可得到结论 $f'(\xi) = c$ ；

由于 $g'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0$ ，由极限的保号性可得，当 $x > a$ 且 x 与 a 充分接近时，有

$g(x) < g(a)$ ；同理，当 $x < b$ 且 x 与 b 充分接近时，有 $g(x) < g(b)$

故 $g(x)$ 在端点 a, b 处不取最小值，但 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，所以它在 $[a, b]$ 上有最小值，因此存在 $\exists \xi \in (a, b)$ ，使得 $g(\xi) = \min_{a \leq x \leq b} g(x)$ ，由费马 (Fermat) 定理可得， $g'(\xi) = 0$ ，

故可得结论： $f'(\xi) = c$

【备注】(1) 定理的等价形式：

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，若在 $[a, b]$ 上 $f'(x) \neq 0$ ，则 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上保持定号 (恒正或恒负)；

(2) 由于连续函数的介值性定理有广泛的应用，因此导函数的介值性定理 (G.Darboux 定理) 也有广泛的应用 (条件弱，适应范围更广)；

(3) 由达布定理很容易看出，若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，则 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上至多存在震荡型间断点，而不可能存在第一类间断点和无穷型间断点。

理论五：费马 (Fermat) 引理

费马引理 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导，如果对任意的 $x \in U(x_0)$ ，有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) \geq f(x_0)),$$

那么 $f'(x_0) = 0$ 。

证 不妨设 $x \in U(x_0)$ 时， $f(x) \leq f(x_0)$ (如果 $f(x) \geq f(x_0)$ ，可以类似地证明)。于是，对于 $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$ ，有

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0),$$

从而当 $\Delta x > 0$ 时，

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0;$$

当 $\Delta x < 0$ 时,

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

根据函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的条件及极限的保号性, 便得到

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0,$$

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

所以, $f'(x_0) = 0$. 证毕.

通常称导数等于零的点为函数的驻点(或稳定点, 临界点):

理论六: Rolle 中值定理

罗尔定理 如果函数 $f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导;
- (3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$,

那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ ($a < \xi < b$), 使得 $f'(\xi) = 0$.

证 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 根据闭区间上连续函数的最大值最小值定理, $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上必定取得它的最大值 M 和最小值 m . 这样, 只有两种可能情形:

(1) $M = m$. 这时 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上必然取相同的数值 $M: f(x) = M$. 由此, $\forall x \in (a, b)$, 有 $f'(x) = 0$. 因此, 任取 $\xi \in (a, b)$, 有 $f'(\xi) = 0$.

(2) $M > m$. 因为 $f(a) = f(b)$, 所以 M 和 m 这两个数中至少有一个不等于 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 的端点处的函数值. 为确定起见, 不妨设 $M \neq f(a)$ (如果设 $m \neq f(a)$, 证法完全类似), 那么必定在开区间 (a, b) 内有一点 ξ 使 $f(\xi) = M$. 因此, $\forall x \in [a, b]$, 有 $f(x) \leq f(\xi)$, 从而由费马引理可知 $f'(\xi) = 0$.

定理证毕.

理论七: Lagrange 中值定理 (2009 年)

若 $f(x)$ 满足条件: 1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; 2) 在开区间 (a, b) 内可导, 则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

分析: 令 $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 则 $f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, $(f(x)-kx)' \Big|_{x=\xi} = 0$

证明: 设 $F(x) = f(x) - kx$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $F(a) = F(b)$, 则由罗尔定理, 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = k$, 即 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

【注】 Cauchy 中值定理、Taylor 定理、L'Hospital 法则, 只需了解下证明即可

理论八: 单调性的判别

定理: 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导.

- 1) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加;
- 2) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

注 1) 利用拉格朗日中值定理简证

证明: 任取 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $x_1 < x_2$, 易验证 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足拉格朗日定理, 应用此定理得 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使得 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, 故当 $f'(x) > 0 (< 0)$ 时, 我们有 $f(x_2) - f(x_1) > 0 (< 0)$, 即 $f(x) \uparrow (\downarrow)$.

理论九: 凹凸性判别

19. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f''(x) \geq 0$. 证明对于 (a, b) 内任意两点 x_1, x_2 及 $0 \leq t \leq 1$, 有

$$f[(1-t)x_1 + tx_2] \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

证 由 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 知 $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2 \in (a, b)$, 利用泰勒公式有

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2!} f''(\xi_1)(x_1 - x_0)^2, \xi_1 \text{ 介于 } x_1, x_0 \text{ 之间};$$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{1}{2!} f''(\xi_2)(x_2 - x_0)^2, \xi_2 \text{ 介于 } x_2, x_0 \text{ 之间}.$$

由 $f''(x) \geq 0$ 知 $f''(\xi_1) \geq 0, f''(\xi_2) \geq 0$, 故

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \text{ 及 } f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0),$$

$$\begin{aligned} \text{因此, } & (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \\ & \geq (1-t)f(x_0) + tf(x_0) + f'(x_0)[(1-t)(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0)] \\ & = f(x_0) + f'(x_0)[(1-t)x_1 + tx_2 - x_0] = f(x_0), \end{aligned}$$

$$\text{即 } f[(1-t)x_1 + tx_2] \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

【注】 也可使用函数单调性进行证明

理论十: 定积分中值定理 (2002 年, 2008 年)

1.1. 定积分中值定理 【2008 年数二】

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则至少存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$;

【证明】因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在最大值与最小值；

不妨设有： $m \leq f(x) \leq M$

根据积分估值不等式有： $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

所以有： $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$

根据介值性定理可得：至少存在 $\xi \in [a, b]$ ，使得 $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(\xi)$ 成立

即： $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ 成立

【注】① 称 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分平均值；

② 关于介值点 ξ 的存在性也可改为 $\xi \in (a, b)$ ；

【证明】 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在原函数，不妨设为 $F(x)$ ，即有 $F'(x) = f(x)$ ，对于 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上应用拉格朗日中值定理可得：至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得：

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a)$$

由牛顿-莱布尼兹公式可得： $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

故有： $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ ， $\xi \in (a, b)$

1.2. 积分第一中值定理【2002年数三】

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且不变号。则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$ ，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

【证明】因为 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且不变号，不妨设 $g(x) \geq 0$ ，则有 $\int_a^b g(x)dx \geq 0$ ；

而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在最大值与最小值；

即有： $m \leq f(x) \leq M$

所以： $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$

两边积分： $m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$

因为 $\int_a^b g(x)dx \geq 0$ ，①若 $\int_a^b g(x)dx = 0$ ，则根据上式可得： $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$

所以对于任意的 $\xi \in [a, b]$ ，均有 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$ 成立；

②若 $\int_a^b g(x)dx > 0$ ，则有： $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$

根据介值性定理可得：至少存在 $\xi \in [a, b]$ ，使得 $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(\xi)$ 成立

即： $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ 成立。

【备注 1】 该定理使用范围更广，在解题（计算和证明）中有着广泛的应用，如果被积函数满足定理的条件，可根据本定理进行适当化简。

【备注 2】 定积分的常用性质也需要重点掌握，比如周期性、奇偶性等

理论十一：重要不等式

9. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上均连续，证明：

$$(1) \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \quad (\text{柯西-施瓦茨不等式});$$

$$(2) \left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{闵可夫斯基不等式}).$$

证 (1) 对任意实数 λ ，有 $\int_a^b [f(x) + \lambda g(x)]^2 dx \geq 0$ ，即

$$\int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \lambda^2 \int_a^b g^2(x)dx \geq 0,$$

上式左边是一个关于 λ 的二次三项式，它非负的条件是其系数判别式非正，即有

$$4 \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - 4 \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \leq 0,$$

从而本题得证。

$$\begin{aligned} (2) \int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx &= \int_a^b [f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x)] dx \\ &= \int_a^b f^2(x)dx + 2 \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \\ &\leq \int_a^b f^2(x)dx + 2 \left(\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} + \int_a^b g^2(x)dx \\ &= \left[\left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2, \end{aligned}$$

从而本题得证。

理论十二：N-L 公式

定理 3 (微积分基本定理) 如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数, 那么

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2-4)$$

证 已知函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, 又根据定理 2 知道, 积分上限的函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

也是 $f(x)$ 的一个原函数. 于是这两个原函数之差 $F(x) - \Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上必定是某一个常数 C (第四章第一节), 即

$$F(x) - \Phi(x) = C \quad (a \leq x \leq b). \quad (2-5)$$

在上式中令 $x=a$, 得 $F(a) - \Phi(a) = C$. 又由 $\Phi(x)$ 的定义式(2-3)及上节定积分的补充规定(1)可知 $\Phi(a) = 0$, 因此, $C = F(a)$. 以 $F(a)$ 代入(2-5)式中的 C , 以 $\int_a^x f(t) dt$ 代入(2-5)式中的 $\Phi(x)$, 可得

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

在上式中令 $x=b$, 就得到所要证明的公式(2-4).

理论十三：变限积分求导定理 (2008 年)

定理 9.9 若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则由(1)式所定义的函数 Φ 在 $[a, b]$ 上连续.

证 对 $[a, b]$ 上任一确定的点 x , 只要 $x + \Delta x \in [a, b]$, 按定义式(1)有

$$\Delta\Phi = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

因 f 在 $[a, b]$ 上有界, 可设 $|f(t)| \leq M, t \in [a, b]$. 于是, 当 $\Delta x > 0$ 时有

$$|\Delta\Phi| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \right| \leq \int_x^{x+\Delta x} |f(t)| dt \leq M\Delta x;$$

当 $\Delta x < 0$ 时则有 $|\Delta\Phi| \leq M|\Delta x|$. 由此得到

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta\Phi = 0,$$

即证得 Φ 在点 x 连续. 由 x 的任意性, f 在 $[a, b]$ 上处处连续. \square

定理 1 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 那么积分上限的函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

在 $[a, b]$ 上可导, 并且它的导数

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (a \leq x \leq b). \quad (2-2)$$

证 若 $x \in (a, b)$, 设 x 获得增量 Δx , 其绝对值足够地小, 使得 $x + \Delta x \in (a, b)$, 则 $\Phi(x)$ (图 5-6, 图中 $\Delta x > 0$) 在 $x + \Delta x$ 处的函数值为

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t) dt.$$

由此得函数的增量

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \\ &= \int_a^{x + \Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt. \end{aligned}$$

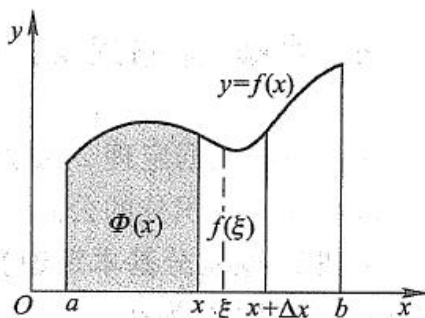


图 5-6

再应用积分中值定理, 即有等式

$$\Delta\Phi = f(\xi) \Delta x,$$

这里, ξ 在 x 与 $x + \Delta x$ 之间. 把上式两端各除以 Δx , 得函数增量与自变量增量的比值

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi).$$

由于假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 而 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\xi \rightarrow x$, 因此 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$. 于是, 令 $\Delta x \rightarrow 0$ 对上式两端取极限时, 左端的极限也应该存在且等于 $f(x)$. 这就是说, 函数 $\Phi(x)$ 的导数存在, 并且

$$\Phi'(x) = f(x).$$

若 $x = a$, 取 $\Delta x > 0$, 则同理可证 $\Phi'_+(a) = f(a)$; 若 $x = b$, 取 $\Delta x < 0$, 则同理可证 $\Phi'_-(b) = f(b)$.

定理 1 证毕.

例 15 证明 $R(A^T A) = R(A)$.

证 根据例 14 的结论, 往证齐次方程 $Ax = 0$ 与 $(A^T A)x = 0$ 同解:

若 x 满足 $Ax = 0$, 则有 $A^T(Ax) = 0$, 即 $(A^T A)x = 0$;

若 x 满足 $(A^T A)x = 0$, 则 $x^T(A^T A)x = 0$, 即 $(Ax)^T(Ax) = 0$, 从而 $Ax = 0$ (参看第二章例 17).

综上所述可知方程组 $Ax = 0$ 与 $(A^T A)x = 0$ 同解, 因此 $R(A^T A) = R(A)$.

例 13 设 $A_{m \times n}, B_{n \times l} = O$, 证明 $R(A) + R(B) \leq n$.

证 记 $B = (b_1, b_2, \dots, b_l)$, 则

$$A(b_1, b_2, \dots, b_l) = (0, 0, \dots, 0),$$

即

$$Ab_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l),$$

表明矩阵 B 的 l 个列向量都是齐次方程 $Ax = 0$ 的解. 记方程 $Ax = 0$ 的解集为 S , 由 $b_i \in S$, 知有 $R(b_1, b_2, \dots, b_l) \leq R_S$, 即 $R(B) \leq R_S$. 而由定理 7 有 $R(A) + R_S = n$, 故 $R(A) + R(B) \leq n$.

例 15 证明 $R(A^T A) = R(A)$.

证 根据例 14 的结论, 往证齐次方程 $Ax = 0$ 与 $(A^T A)x = 0$ 同解:

若 x 满足 $Ax = 0$, 则有 $A^T(Ax) = 0$, 即 $(A^T A)x = 0$;

若 x 满足 $(A^T A)x = 0$, 则 $x^T(A^T A)x = 0$, 即 $(Ax)^T(Ax) = 0$, 从而 $Ax = 0$ (参看第二章例 17).

综上所述可知方程组 $Ax = 0$ 与 $(A^T A)x = 0$ 同解, 因此 $R(A^T A) = R(A)$.

(3) A 为 n 阶方阵, $r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆 $\Leftrightarrow A$ 的行(列)向量组线性无关;

(4) $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$, $r(kA) = r(A), k \neq 0$;

证明: 法一: 初等变换 $(A \pm B, B) \xrightarrow{\text{列}} (A, B)$

所以 $r(A \pm B) \leq r(A \pm B, B) = r(A, B) \leq r(A) + r(B)$

法二: 分块矩阵: $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} A & A \\ O & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} A & A \pm B \\ O & B \end{pmatrix}$

故 $r(A) + r(B) = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & A \pm B \\ O & B \end{pmatrix} \geq r(A \pm B)$

【备注】 $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$; $r\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B)$

(5) $r(A) + r(B) - n \leq r(A_{mn} B_{np}) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ ——“矩阵越乘秩越小”;

证明: 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{mn} & O \\ E_n & B_{np} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} A_{mn} & -AB \\ E_n & O \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} O & -AB \\ E_n & O \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } r \begin{pmatrix} A_{mn} & O \\ E_n & B_{np} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} O & AB \\ E_n & O \end{pmatrix} = n + r(AB)$$

$$\text{而 } r \begin{pmatrix} A_{mn} & O \\ E_n & B_{np} \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B)$$

所以 $n + r(AB) \geq r(A) + r(B)$, 即 $r(A) + r(B) - n \leq r(AB)$

证 因 $AB = C$, 知矩阵方程 $AX = C$ 有解 $X = B$, 于是据定理 6 有 $R(A) = R(A, C)$. 而 $R(C) \leq R(A, C)$, 因此 $R(C) \leq R(A)$.

又 $B^T A^T = C^T$, 由上段证明知有 $R(C^T) \leq R(B^T)$, 即 $R(C) \leq R(B)$.

综合便得 $R(C) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.

证毕

定理 6 和定理 7 的应用, 我们在下一章中讨论.

$$(6) \max\{r(A), r(B)\} \leq r(A|B), r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B);$$

(7) A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵, 如果 $AB = 0$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$;

证明: 法一: 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{mn} & O \\ E_n & B_{np} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} A_{mn} & O \\ E_n & O \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} O & O \\ E_n & O \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } r \begin{pmatrix} A_{mn} & O \\ E_n & B_{np} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} O & O \\ E_n & O \end{pmatrix} = n, \text{ 而 } r \begin{pmatrix} A_{mn} & O \\ E_n & B_{np} \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B)$$

故 $r(A) + r(B) \leq n$

法二:

证 记 $B = (b_1, b_2, \dots, b_l)$, 则

$$A(b_1, b_2, \dots, b_l) = (0, 0, \dots, 0),$$

即

$$Ab_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l),$$

表明矩阵 B 的 l 个列向量都是齐次方程 $Ax = 0$ 的解. 记方程 $Ax = 0$ 的解集为 S , 由 $b_i \in S$, 知有 $R(b_1, b_2, \dots, b_l) \leq R_S$, 即 $R(B) \leq R_S$. 而由定理 7 有 $R(A) + R_S = n$, 故 $R(A) + R(B) \leq n$.

(8) 若 $r(A_{m \times n}) = n$ 则 $r(AB) = r(B)$; 若 $r(B_{n \times s}) = n$ 则 $r(AB) = r(A)$;

证明: **法一:** 方程组同解: 构造方程组 $A_{mn}B_{ns}x=0$ 与 $B_{ns}x=0$

①若 $B_{ns}x=0$, 则显然 $A_{mn}B_{ns}x=0$

②若 $A_{mn}B_{ns}x=0$, 因为 $r(A_{mn})=n$, 所以 $r(A^T A)=r(A_{mn})=n$

故 $(A^T A_{mn})B_{ns}x=0$, 因为 $A^T A$ 可逆, 故 $B_{ns}x=0$

所以 $A_{mn}B_{ns}x=0$ 与 $B_{ns}x=0$ 同解, 故 $r(AB)=r(B)$

法二: 显然 $r(AB) \leq r(B)$

记 $AB=C$, 则 $(A^T A)B=A^T C$, 而 $r(A^T A)=r(A_{mn})=n$, 故 $A^T A$ 可逆

所以 $B=(A^T A)^{-1}A^T C$

故 $r(B) \leq r(C)=r(AB)$

所以 $r(AB)=r(B)$

24. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$, E 为 n 阶单位矩阵, 证明

$$R(A) + R(A - E) = n.$$

提示: 利用矩阵秩的性质⑥和⑧.

证

$$A^2 = A$$

$$\Rightarrow A(A - E) = O$$

$$\Rightarrow R(A) + R(A - E) \leq n \quad (\text{矩阵秩的性质⑧}).$$

另一方面, 由矩阵秩的性质⑥, 知

$$R(A) + R(E - A) \geq R(A + (E - A)) = R(E) = n,$$

因 $R(E - A) = R(A - E)$, 故由以上两个不等式知, $R(A) + R(A - E) = n$.

例 17 证明矩阵 $A = O$ 的充分必要条件是方阵 $A^T A = O$.

证 条件的必要性是显然的, 下面证明条件的充分性.

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 把 A 用列向量表示为 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 则

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_n \end{pmatrix},$$

即 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 的 (i, j) 元为 $\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j$, 因 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{O}$, 故

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

特殊地, 有

$$\mathbf{a}_j^T \mathbf{a}_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

而

$$\mathbf{a}_j^T \mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \cdots + a_{mj}^2,$$

由 $a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \cdots + a_{mj}^2 = 0$, (因 a_{ij} 为实数) 得

$$a_{1j} = a_{2j} = \cdots = a_{mj} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

即

$$\mathbf{A} = \mathbf{O}.$$

证毕

例 18: $|A^*| = |A|^{n-1}$

证明: 因为 $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |A|\mathbf{E}$, 故两边取行列式有: $|A||A^*| = |A|^n$

①若 $|A| \neq 0$, 则有 $|A^*| = |A|^{n-1}$, 结论成立

②若 $|A| = 0$, 此时有 $r(\mathbf{A}) \leq n-1$, 所以 $r(\mathbf{A}^*) \leq 1$

故 $|A^*| = 0$, 所以 $|A^*| = 0 = |A|^{n-1}$ 成立

14. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 都是 n 阶矩阵, 且 \mathbf{A} 可逆, 证明 \mathbf{AB} 与 \mathbf{BA} 相似.

证 因 \mathbf{A} 可逆, 故

$$\mathbf{BA} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{BA} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB})\mathbf{A},$$

由定义, \mathbf{AB} 与 \mathbf{BA} 相似.

25. 设 A 为 n 阶 ($n \geq 2$) 矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 证明

$$R(A^*) = \begin{cases} n, & \text{当 } R(A) = n, \\ 1, & \text{当 } R(A) = n-1, \\ 0, & \text{当 } R(A) \leq n-2. \end{cases}$$

证 (1) 当 $R(A) = n$ 时, $|A| \neq 0$. 由习题二题 24, 得

$$|A^*| = |A|^{n-1} \neq 0,$$

从而

$$R(A^*) = n;$$

(2) 当 $R(A) \leq n-2$ 时, 由矩阵秩的定义知 A 的所有 $n-1$ 阶子式即 A^* 的任一元素均为零, 即 $A^* = O$, 从而 $R(A^*) = 0$;

(3) 当 $R(A) = n-1$ 时, 由矩阵秩的定义, A 中至少有一个 $n-1$ 阶子式不为零, 也即 A^* 中至少有一个元素不为零, 故 $R(A^*) \geq 1$.

另一方面, 因 $R(A) = n-1$, 有 $|A| = 0$. 由 $AA^* = |A|E$ 知,

$$AA^* = O.$$

由矩阵秩的性质⑧得

$$R(A) + R(A^*) \leq n,$$

把 $R(A) = n-1$ 代入上式, 得 $R(A^*) \leq 1$. 综合以上两个关于 $R(A^*)$ 的不等式, 便有 $R(A^*) = 1$.

注 本题的结论很有用, 值得记取.

8. 设 n 阶矩阵 A, B 满足 $R(A) + R(B) < n$, 证明 A 与 B 有公共的特征值, 有公共的特征向量.

证 显然 $R(A) < n$. 另一方面,

$$R(A) < n \Leftrightarrow A \text{ 不可逆} \Leftrightarrow 0 \text{ 是 } A \text{ 的特征值};$$

同理, 0 也是 B 的特征值, 于是 A 与 B 有公共的特征值 0 .

A 与 B 的对应 $\lambda = 0$ 的特征向量依次是方程 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 的非零解. 于是

A 与 B 有对应于 $\lambda = 0$ 的公共特征向量

$$\Leftrightarrow \text{方程组 } \begin{cases} Ax = 0 \\ Bx = 0 \end{cases} \text{ 有非零解}$$

$$\Leftrightarrow \text{方程 } \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0 \text{ 有非零解}$$

$$\Leftrightarrow R \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} < n.$$

另一方面, 由矩阵秩的性质⑤

$$R \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = R(A^T, B^T) \leq R(A^T) + R(B^T) = R(A) + R(B) < n.$$

综上, A 与 B 有公共的特征向量.