一、选择题（每小题 3 分，共 10 题）

1.已知 $A=\{x|x<3,x\in N\},B=\{x|x^2-x-2<0\}$,则集合 $A\cap B$ 的子集个数为（　　）

A.2　　　　B.4　　　　C.6　　　　D.8

【答案】选 B。

【解析】交集为$\{0，1\}$，那么交集的子集为 4 个。故本题选 B。

2.下列命题中，真命题是（　　）

A．$\exists x_0\in R$,使得$e^{x_0}\leq 0$　　　　B.$\forall x>0$,且 $x\neq 1$,则 $lgx+\frac{1}{lgx}\geq 2$

C.函数 $f(x)=2^x-1$ 有两个零点　　　　D.$a>1,b>1$ 是 $ab>1$ 的充分不必要条件

【答案】选 D。

【解析】A 项，指数函数值域是$(0，+\infty)$，即不存在，故 A 为假命题；B 项当 $x=\frac{1}{10}$, $lgx+\frac{1}{lgx}=-2<2$,即原命题不成立，故 B 项为假命题；C 项 $y=2^x$在其定义域上为单调递增函数故 $f(x)=2^x-1$ 有且只有一个零点，C 项为假命题；

D项，充分性：当$a>1$，$b>1$时，$ab>1$，即充分性成立；必要性：当$a=3$，$b=\frac{1}{2}$，满足$ab>1$，但不满足$a>1$，$b>1$，即必要性不成立，所以$a>1$，$b>1$是$ab>1$的充分不必要条件，故D项是真命题，符合题意。

故本题选 D。

3.已知 $a=3^{-\frac{1}{2}},b=\log_3\frac{1}{2},c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$,则 a,b,c 的关系是（　　）

A．$a>c>b$　　　　B.$c>a>b$

C.$a>b>c$　　　　D.$c>b>a$

【答案】选 B。

【解析】

$\because 0<a=3^{-\frac{1}{2}}<3^0=1,b=\log_3\frac{1}{2}<\log_3 1=0,c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$

所以 $c>a>b$，故本题选 B。

4.函数 $f(x)=ax^3-bx-\ln x\,(a>0,b\in R)$的一个极值点是 $x=1$,则$\ln a-2b+1$ 的最大值为（　　）

A.$1+\ln 6$　　　　B. $1-\ln 6$

C. $2-\ln 6$　　　　D. $2+\ln 6$

【答案】选 C。

【解析】

$\because f(x)=ax^3-bx-\ln x$

$\therefore f'(x)=3ax^2-b-\frac{1}{x}$

$\because$函数 $f(x)$的一个极值点是 $x=1$

$\therefore f'(1)=3a-b-1=0$

$\therefore b=3a-1$

令 $g(a)=\ln a-2(3a-1)+1$

$\therefore g'(a)=\frac{1}{a}-6$

$\therefore$当 $0<a<\frac{1}{6}$时，$g'(a)>0$，$g(a)$单调递增；

当 $a>\frac{1}{6}$时，$g'(a)<0$，$g(a)$单调递减

$\therefore g(a)\le g(\frac{1}{6})=\ln(\frac{1}{6})-2(3\times\frac{1}{6}-1)+1=2-\ln 6$

$\therefore \ln a-2b+1\le 2-\ln 6$

故本题选 C.

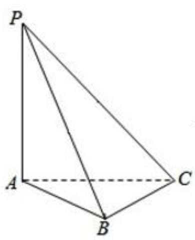
5.三棱锥 P-ABC 中，PA⊥AB,PA⊥BC,AC⊥BC,AC=BC=1,PA=$\sqrt{3}$,则该三棱锥的外接球表面积为（　　）

A.5π　　　　B. $\sqrt{2}\pi$

C. 20π　　　　D. $\frac{7}{2}\pi$

【答案】选 A。

【解析】



$PA\perp$平面 ABC，

$AC\perp BC$，

$\therefore BC\perp$平面 PAC，PB是三棱锥 $P-ABC$ 的外接球直径；

$\because Rt\triangle PBA$ 中，$AB=\sqrt{2}, PA=\sqrt{3}$

$\therefore PB=\sqrt{5}$,可得外接球半径

$R=\frac{1}{2}PB=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$外接球的表面积 $S=4\pi R^2=5\pi$

故本题选 A。

6.已知直线 l，m,平面α,β,且 $l\perp\alpha$，$m\subset\beta$,则（1）若$\alpha\parallel\beta$，则 $l\perp m$;（2）若 $l\perp m$，则$\alpha\parallel\beta$;（3）若$\alpha\perp\beta$，则 $l\parallel m$;（4）若 $l\parallel m$，则$\alpha\perp\beta$。其中真命题的个数是（　　）

A.4　　　　B.1　　　　C.3　　　　D.2

【答案】选 D。

【解析】(1)、(4）为真命题。

7.已知$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$,则 $\sin 2\alpha=$（　　）

A.$-\frac{7}{9}$　　　　B. .$\frac{7}{9}$　　　　C. .$-\frac{1}{9}$　　　　D. .$\frac{1}{9}$

【答案】选 B。

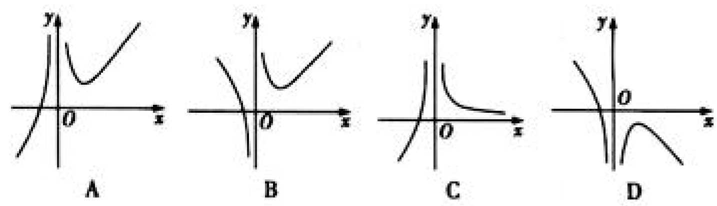
【解析】

B　由 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$,得

$$\sin 2\alpha=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{1-\tan^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1-\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{8}}=\frac{7}{9}$$,故选 B.

8.已知函数 $f(x)=x-\ln|x|$,则 $f(x)$的图像大致为（　　）



【答案】选 A。

【解析】

当 $x<-1$ 时 $x<0, ln|x|>0 \therefore f(x)=x-ln|x|<0$

$\therefore$ 函数 $f(x)=x-ln|x|$ 的图像在 x 轴下方

$\therefore$ 排除 B, D

当 $x>1$ 时 $f(x)=x-ln|x|=x-lnx$

$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$

$\therefore f(x)=x-ln|x|$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增

$\therefore$ 排除 C

故本题选 A。

9.已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线与圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 相交于 A,B 两点，若 $|AB|=2$，则双曲线的离心率为（　　）

A.4　　　　B.$2\sqrt{2}$　　　　C.2　　　　D. $\sqrt{2}$

【答案】选 C。

【解析】双曲线渐近线方程：$bx-ay=0$，又圆的圆心为（2，0），半径为 2，由勾股定理知圆心到直线 AB 的距离为 $\sqrt{3}$，所以 $\frac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{3}$，即 $3a^2=b^2$，所以该双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=2$。故本题选 C。

10. 函数 $f(x)=e^{-x}-2x-a$，若曲线 $y=x^3+x(x\in[-1,1])$ 上存在点 (x_0,y_0) 使得 $f(y_0)=y_0$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A.$(-\infty, e^{-2}-6]\cup[e^2+6,+\infty)$　　　　B.$[e^{-2}-6, e^2+6]$

C.$(e^{-2}-6, e^2+6)$　　　　D.$(-\infty, e^{-2}-6)\cup(e^2+6,+\infty)$

【答案】B

【解析】

由题意，曲线 $y=x^3+x=x(x^2+1)$，

$(x\in[-1,1])$ 上存在点 (x_0,y_0)，

$\therefore -2\leqslant y_0\leqslant 2$.

函数 $f(x)=e^{-x}-2x-a$，

由 $f(y_0)=y_0$.

可得 $f(y_0)=e^{-y_0}-2y_0-a=y_0$

$\therefore a=e^{-y_0}-3y_0$.

令 $g(x)=e^{-x}-3x(x\in[-2,2])$.

那么 $g'(x)=-e^{-x}-3$，在 $x\in[-2,2]$ 上

$g'(x)<0$，

$\therefore g(x)=e^{-x}-3x$，在 $x\in[-2,2]$ 单调递减；

$\therefore e^{-2}-6\leqslant g(x)\leqslant e^2+6$

即 $e^{-2}-6\leqslant a\leqslant e^2+6$

故选：B.

二、填空题（每题 3 分，共 4 题，共 12 分）

11. 抛物线 $y^2=2x$ 上到直线 $x-y+3=0$ 距离最短的点坐标为_________.

【答案】$(\frac{1}{2},-1)$

【解析】

设此点为 P 纵坐标是 a

则 $a^2=2x$

所以 $P\left(\frac{a^2}{2},a\right)$

P 到 $x+y+3=0$距离 $d=\frac{|\frac{a^2}{2}+a+3|}{\sqrt{1+1}}$

$\because \frac{a^2}{2}+a+3$

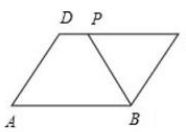
$=\frac{1}{2}(a+1)^2+\frac{5}{2}$

所以当 $a=-1,\ \frac{a^2}{2}+a+3$最小

所以 $P\left(\frac{1}{2},-1\right)$

12. 平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$, 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}=-1$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$_________.

【答案】11

【解析】


$\because$ 在平行四边形 $ABCD$

中，$AB=4$, $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$，

$\therefore \overrightarrow{CP}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，

$\therefore \overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AB}$，

$\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-12=-1$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=11.$

故答案为： 11.

13. 在△ABC 中，角 A、B、C 的对边分别是 a,b,c 且

$2\sin A\cdot\cos B+\sin(B+C)=0$, $b=\sqrt{13}, a+c=4$, 则△ABC 的面积是_________.

【答案】$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

【解析】$\because B+C=\pi-A, \therefore \sin(B+C)=\sin A$，由此可得 $\sin A+2\sin A\cdot\cos B=0$, 即

$\sin A(1+2\cos B)=0$, $\because \sin A>0, \therefore 1+2\cos B=0$, 可得 $\cos B=-\frac{1}{2}$，

$\because B\in(0,\pi)$, $\therefore B=\frac{2\pi}{3}$. $\because b=\sqrt{13}, a+c=4, \therefore$ 根据余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos120^\circ$,

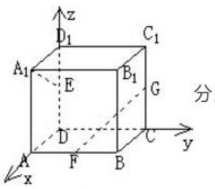
可得 $13=(a+c)^2-ac=16-ac$, 解得 $ac=3$, 因此，△ABC 的面积

$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times3\times\sin120^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

14. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 E、F、G 分别 DD_1、AB、CC_1 的中点，则异面直线 A_1E 与 GF 所成角的余弦值是_________.

【答案】$\frac{\sqrt{30}}{10}$

【解析】



分别以 DA 、 DC 、 DD_1 、为 x 、 y 、 z 轴建立如图坐标系，设正方体的棱长为 2，则

$A_1(2,0,2), E(0,0,1), G(0,2,1), F(2,1,0)$

$\therefore \overrightarrow{A_1E} = (-2,0,-1), \overrightarrow{GF} = (2,-1,-1)$

设 $\overrightarrow{A_1E}$ 、 $\overrightarrow{GF}$ 的夹角为 θ，则

$\cos\theta = \dfrac{|\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{GF}|}{|\overrightarrow{A_1E}|\cdot|\overrightarrow{GF}|} =$

$\dfrac{|-2\times(2)+0\times(-1)+(-1)\times(-1)|}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$

即异面直线 A_1E 与 GF 所成角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$

故答案为： $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$

三、解答题

15.（8 分） S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_n>0, a_n^2+3a_n=6S_n+4$ 。

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\dfrac{3}{a_na_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

解答

15.（1） 当 $n=1$ 时，有 $a_1^2+3a_1=6a_1+4$，即 $(a_1-4)(a_1+1)=0$.

因为 $a_1>0$，所以 $a_1+1>0$. 从而 $a_1-4=0$，即 $a_1=4$.

由 $a_n^2+3a_n=6S_n+4$，知 $a_{n+1}^2+3a_{n+1}=6S_{n+1}+4$.

两式相减，得 $a_{n+1}^2+3a_{n+1}-a_n^2-3a_n=6S_{n+1}+4-6S_n-4$.

即 $a_{n+1}^2+3a_{n+1}-a_n^2-3a_n=6a_{n+1}$，即 $a_{n+1}^2-a_n^2-3a_{n+1}-3a_n=0$，

即 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-3)=0$.

因为 $a_n>0$，所以 $a_{n+1}-a_n-3=0$，即 $a_{n+1}-a_n=3$.

所以，数列 $\{a_n\}$ 是首项为 4，公差为 3 的等差数列.

所以 $a_n=4+3(n-1)=3n+1$.

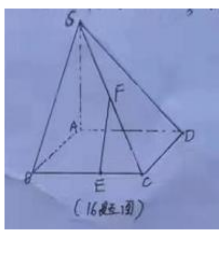
（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $b_n=\dfrac{3}{(3n+1)(3n+4)}=\dfrac{1}{3n+1}-\dfrac{1}{3n+4}$.

数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为

T (2) $-\frac{1}{7})$ (1) $\frac{1}{.0})+\cdots+(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1})+(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4})$

$=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3n+4}$.

16.（10 分）在四棱锥 $S-ABCD$ 中，平面 $SAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面



$SAD\perp$平面$ABCD$.

（Ⅰ）证明：$SA\perp$平面$ABCD$;

（Ⅱ）若底面 $ABCD$ 为矩形，$SA=2AD=3AB$, F 为 SC 的中点，$\overline{BE}=\frac{2}{3}\overline{BC}$ ，求直线 EF 与平面 SCD 所成角的正弦值。

(Ⅰ)证法1:在平面 $ABCD$ 内过点 C 作两条直线 l_1,l_2，
使得 $l_1\perp AB, l_2\perp AD$.
因为 $AB\cap AD=A$, 所以 l_1,l_2 为两条相交直线。
因为平面 $SAB\perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $SAB\cap$ 平面 $ABCD=AB, l_1\subset$ 平面 $ABCD, l_1\perp AB$, 所以 $l_1\perp$ 平面 SAB.
所以 $l_1\perp SA$.
同理可证 $l_2\perp SA$.
又因为 $l_1\subset$平面 $ABCD, l_2\subset$ 平面 $ABCD, l_1\cap l_2=C$，
所以 $SA\perp$ 平面 $ABCD$.

(Ⅱ)如图,分别以 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{AS}$ 所在方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $A-xyz$.
设 $SA=6$, 则
$AB=2, AD=3, B(2,0,0)$, $C(2,3,0)$, $D(0,3,0)$, $S(0,0,6)$.
由 F 为 SC 的中点,得 $F\left(1,\frac{3}{2},3\right)$;
由 $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$,得 $E(2,2,0)$.
所以
$\overrightarrow{EF}=\left(-1,-\frac{1}{2},3\right)$, $\overrightarrow{SC}=(2,3,-6)$, $\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$.
设平面 SCD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$ ，
则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{SC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}2x+3y-6z=0\\ 2x=0\end{cases}$.

取 $z=1$，则 $y=2$， $x=0$.

所以 $\vec{n}=(0,2,1)$.

所以 $\cos<\overrightarrow{EF},$

$\vec{n}>$

$$=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{EF}|\cdot|\vec{n}|}$$

$$=\frac{(-1)\times 0+\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2+3\times 1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+9}\times\sqrt{0+4+1}}$$

$$=\frac{4\sqrt{205}}{205}$$

所以，直线 EF 与平面 SCD 所成角的正弦值为

$\frac{4\sqrt{205}}{205}$.

17.（10 分）已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点为 $F(c,0)$ 且 $a>b>c>0$, 短轴的一个端点为 D，点 O 到直线 DF 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，过原点和 x 轴不重合的直线与椭圆 E 相交于 C、G 两点且 $|\overline{GF}|+\overline{CF}|=4$

（1）求椭圆 E 的方程;

（2）是否存在过点 $P(2,1)$ 的直线 l 与椭圆 E 相交于不同的两点 A,B 且使得 $\overline{OP^2}=4\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ 成立？若存在，使求出直线 l 的方程；若不存在，说明理由。

(1)设椭圆的左焦点为 F',则

$|CF|+|CF'|=4=2a$

$\therefore a=2.$

$\because$ 原点 O 到直线 DF 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,直线 DF 的方程为 $\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1$,

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore bc=\sqrt{3},$

$\because a>b>c>0,$

$\therefore b=\sqrt{3},\quad c=1,$

$\therefore$ 椭圆 E 的方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1;$

(2)若存在直线 l 满足条件，由题意可设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)+1$，

联立 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$得

$\left(3+4k^2\right)x^2-8k(2k-1)x+16k^2-16k-8=0.$

$\because$ 直线 l 与椭圆 C 相交于不同的两点 A，B，

设 A,B 两点的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

所以

$\triangle=[-8k(2k-1)]^2-4\cdot\left(3+4k^2\right)\cdot\left(16k^2-16k-\right.$

整理得 $32(6k+3)>0.$

解得 $k>-\frac{1}{2}$，

$x_1+x_2=\frac{8k(2k-1)}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{16k^2-16k-8}{3+4k^2}$

$\because \overrightarrow{OP}^2=4\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$,即

$4(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=5$

$\therefore (x_1-2)(x_2-2)\left(1+k^2\right)=\frac{5}{4}.$

即 $[x_1x_2-2(x_1+x_2)++4]\left(1+k^2\right)=\frac{5}{4}.$

$\therefore \left(\frac{16k^2-16k-8}{3+4k^2}-2\times\frac{8k(2k-1)}{3+4k^2}+4\right]\left(1+k^2\right.$

解得 $k=\pm\frac{1}{2}.$

$\because A$，B 为不同的两点，

$\therefore k=\frac{1}{2}.$

于是存在直线 l 满足条件，其方程为 $y=\frac{1}{2}x.$