2019下半年
全国教师资格证考试
考前内部资料

【初高中 数学学科】

必背考点

学员专用 请勿外泄

目录

2019 年国考资格证考试数学学科考前 30 分

第一模块 考情分析

一、考试内容分析

数学学科知识与教学能力是初高中学段教师资格统考科目三的考试科目，考试内容包括数学学科知识、课程知识、教学知识、教学技能四个模块。从近年统考省份教师资格数学学科知识与教学能力的真题来看，试题类型分为单项选择题、简答题、解答题、论述题、案例分析题、教学设计题六种题型，考试时间为 120 分钟，满分为 150 分。

二、题型解读

（一）单项选择题

单项选择题是数学教师资格考试的主要题型之一，其主要考查学科知识和课程知识，考查内容较为广泛。学科知识所占比重较大，侧重于对概念、定义、定理、性质等的应用，计算能力较强；课程知识属于识记或理解记忆的内容，考查题量不多，得分也较为容易。

（二）简答题

简答题是数学教师资格考试中常见题型之一，其题目设计灵活多变，层出不穷。简答题一般包括 5 小题，前三道考查学科知识，后两道考查课程知识和教学知识。其中学科知识多以证明、求解形式呈现，考查对基本定理、基本公式的运用，在证明及解答过程中需做到熟练应用；课程知识和教学知识的考查多以列举、简答形式呈现，考查对基本概念、基本原则的识记，在答题过程中须做到言简意赅，避免回答过长，知识点全面即可。

（三）解答题

解答题考查内容多为大学数学专业基础知识，如导函数、矩阵及线性空间等。该部分综合性强，难度较大，解答题是按步骤给分，故在答题时须条理清楚、字迹工整，方便阅卷老师一目了然。

（四）论述题

论述题考查内容为课程知识、教学知识、教学技能，多为对一些观点或行为进行评价，其综合性较强，具有知识量大、解题方法多、凸显数学思想方法等特点。该类型题目在答题时需提出论点并论证。故在答题时要找到关键字，分点论述，同时保持卷面清洁。

（五）案例分析题

案例分析题考查的内容为教学技能，给出教学片段，提出问题。要求考生依据一定的理论知识给出评价或做出决策，考查考生运用知识解决问题的能力。该题型属于综合性题目，区分度较高，考生需把握住案例分析的特点和规律，掌握正确的解题模式。

（六）教学设计题

教学设计就是给出一个课题，按要求进行设计。一般从教学目标、教学重难点、教学过

程（及设计意图）等几个问题进行考查。教学设计题是考查考生运用有关知识进行教学设计能力的集中体现，属于综合性题目，它不仅能考查考生对知识的了解程度，而且考查考生运用知识解决实际问题的能力。

三、备考策略

在数学学科知识与教学能力的笔试中涉及到的知识点非常多，出题形式灵活，这些都给考生复习备考造成困难，因此对于数学专业知识备考可以分为以下几个阶段：

（一）研究考试内容阶段

该阶段的任务是考生需对考试的范围了解清楚，另外可以根据真题要求进行自我摸底测试，明确自身的实际情况与考试要求的差距。接下来考生可以结合自身的情况，制定复习计划。

（二）基础知识梳理在此阶段，各位考生应当以梳理知识点为主，并配合做对应专题的习题，这样可以巩固所复习的知识同时也提高运算的准确性和高效性。建议考生每一专题复习结束后用思维导图将各模块知识之间建立联系，另外对于错题难题进行分类整理并分析原因，因为第二阶段在复习中最为关键，持续的时间也较长。为了更加高效地学习掌握知识和做题方法，考生可以选择有系统教研的辅导班来帮助自己。

（三）综合练习阶段

在第二阶段全面复习结束后就应该做一些综合考点的题目，这部分题目主要的考查题型为简答题，解答题，论述题，案例分析及教学设计。在复习备考的解答题综合练习阶段需要着重复习大学数学专业基础知识，如导函数、矩阵及线性空间等。另外对于案例分析也可以分类型进行练习，掌握常规出题类型。综合练习阶段是一个将知识内化并综合应用的阶段，因此考生应该多分析，多总结答题思路和答题方法。

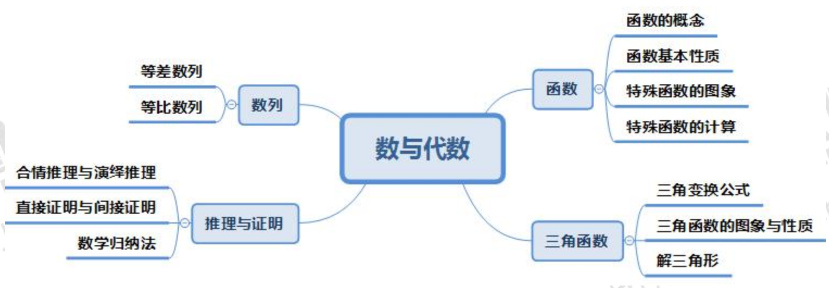
在备考教学设计题的过程中，考生要用心准备相关的教材内容，掌握教学设计的基本技能。在设计和解读的过程中，要注意体现学生为主体，设计利用学生的主动性，强调对思想方法和情感态度价值观的引导。

（四）模拟考试阶段

基础复习之后，考生可以按照历年真题要求进行实战演练。建议考试最好能够尽可能逼真地模拟考试情境的各个方面，其中包括考试过程中做题顺序和每个题型时间的安排。在考试前一天考生尽量调整作息时间以保证在考场上呈现最佳水平。

第二模块　高频知识点汇总

第一部分　数与代数



第一章　函数

一、函数的定义

1.求定义域

（1）分母不为0；（2）偶次方根的被开方数非负；（3）对数的真数部分大于0；（4）0的零次幂没有意义。

2.求值域

（1）图象法；（2）配方法；（3）分离常数法；（4）基本不等式；（5）单调性。

3.求解析式

（1）凑配法；（2）换元法；（3）特殊值法；（4）解方程组法；（5）待定系数法。

二、函数的基本性质

1.单调性

（1）确定单调区间的方法：（1）定义法；（2）导数法；（3）图象法。

（2）复合函数 $y=f[g(x)]$ 在公共定义域上的单调性：同增异减。

2.奇偶性

一般地，对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x，若：

（1）偶函数：$f(-x)=f(x)$，图象关于 y 轴对称；

（2）奇函数：$f(-x)=-f(x)$，图象关于原点对称。

3.周期性

（1）对于定义域内的任意一个 x，使 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则 $f(x)$ 叫作周期函数，T 叫作这个函数的一个周期。

（2）$y=f(x)$ 对 $x\in R$ 时，$f(x+a)=f(x-a)$ 或 $f(x-2a)=f(x)$，$(a>0)$ 恒成立，则 $y=f(x)$ 是周期为 $2a$ 的周期函数；

（3）若 $y=f(x)$ 是偶函数，其图象又关于直线 $x=a$ 对称，则 $f(x)$ 是周期为 $2|a|$ 的周期函数；

4.对称性

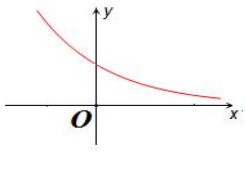
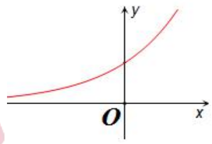
$f(x+a)=f(x-a) \Leftrightarrow f(x-2a)=f(x) \Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称。

5.凹凸性

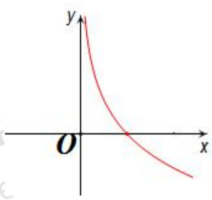
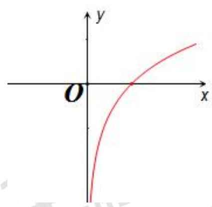
设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，若对于 I 上任两点 x_1,x_2 恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，那么 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的（凸弧）；如果恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的（或凹弧）。

三、特殊函数的图象

1.指数函数的图象与性质：

a 的范围	$0<a<1$	$a>1$
图象		
恒过点	(0,1)	(0,1)
定义域	**R**	**R**
值域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
单调性	单调递减	单调递增
奇偶性	非奇非偶	非奇非偶

2.对数函数的图象与性质

a 的范围	$0<a<1$	$a>1$
图象		
恒过点	(1,0)	(1,0)
定义域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
值域	**R**	**R**
单调性	单调递减	单调递增
奇偶性	非奇非偶	非奇非偶

四、特殊函数的计算

1.指数的运算性质：

（1）$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$（$a>0$，$m$、$n\in\mathbf{N}_+$，$n>1$）；

（2）$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$（$a>0$，$m$、$n\in\mathbf{N}_+$，$n>1$）；

（3）$a^r a^s=a^{r+s}$（$a>0$，r、$s\in\mathbf{R}$）；

（4）$a^r\div a^s=a^{r-s}$（$a>0$，r、$s\in\mathbf{R}$）；

（5）$(a^r)^s=a^{rs}$（$a>0$，r、$s\in\mathbf{R}$）；

（6）$(ab)^r=a^r b^r$（a、$b>0$，$r\in\mathbf{R}$）。

2.对数的运算性质：

设$a>0$，且$a\neq1$，M、$N>0$，则有

（1）$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$；

（2）$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

（3）$\log_{a^n}M^m=\dfrac{m}{n}\log_a M$（$m\in\mathbf{R}$，$n\neq0$）；

（4）$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$（$c>0$，且$c\neq1$，$b>0$）；

（5）$a^{\log_a M}=M$。

第二章　三角函数

一、三角变换公式

1.诱导公式

（1）$\left|\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\pm\alpha\right)\right|=\begin{cases}\sin\alpha\,(n\text{为偶数})\\ \cos\alpha\,(n\text{为奇数})\end{cases}$；（2）$\left|\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\pm\alpha\right)\right|=\begin{cases}\cos\alpha\,(n\text{为偶数})\\ \sin\alpha\,(n\text{为奇数})\end{cases}$

求任意角三角函数时，可以转化为特殊角的三角函数：“奇变偶不变，符号看象限”。

2.三角恒等变换

（1）$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$，$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$；

（2）$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$；

（3）$\tan\alpha\cot\alpha=1$，$\sin\alpha\csc\alpha=1$，$\cos\alpha\sec\alpha=1$。

3.两角和与差公式

（1）$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$；

（2）$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$；

（3） $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$。

4.积化和差公式

（1） $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$；

（2） $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$；

（3） $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$；

（4） $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$；

5.和差化积公式

（1） $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$；

（2） $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$；

（3） $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$；

（4） $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$；

6.倍角公式

（1） $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；

（2） $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$；

（3） $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$。

7.半角公式

（1） $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$；

（2） $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$；

（3） $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$。

二、三角函数的图象与性质

（一）正弦函数

1.定义域：**R**

2.值域：$[-1,1]$

3.单调性

$[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上单调递增；$[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上单调递减。

4.奇偶性与对称性

（1）奇函数，关于原点对称；

（2）对称中心：$(k\pi,0)$（$k\in\mathbf{Z}$），是图象与x轴的交点；

（3）对称轴：直线$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），是过最高点或最低点且垂直于x轴的直线。

5.周期性：最小正周期$T=2\pi$。

（二）余弦函数

1.定义域：$\mathbf{R}$

2.值域：$[-1,1]$

3.单调性

$[-\pi+2k\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上单调递增；$[2k\pi，\pi+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上单调递减。

4.奇偶性与对称性：

（1）偶函数，关于y轴对称；

（2）对称中心：$(\frac{\pi}{2}+k\pi,0)$（$k\in\mathbf{Z}$），是图象与x轴的交点；

（3）对称轴：直线$x=k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），是过最高点或最低点且垂直于x轴的直线。

5.周期性：最小正周期$T=2\pi$。

（三）正切函数

1.定义域：$\{x\,|\,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi，k\in\mathbf{Z}\}$

2.值域：$\mathbf{R}$

3.单调性：$(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$（$k\in\mathbf{Z}$）上单调递增。

4.奇偶性与对称性：

（1）奇函数，关于原点对称；

（2）对称中心：$(\frac{k\pi}{2},0)$（$k\in\mathbf{Z}$），是图象与x轴的交点或渐近线与x轴的交点；

（3）对称轴：不存在。

5.周期性：最小正周期是$T=\pi$。

三、解三角形

1.正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$为外接圆半径）。

2.余弦定理：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$；$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$；$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$。

3.面积公式：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$。

第三章　数列

一、等差数列

1.通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d\ (n\in\mathbf{N}^*)$

2.前n项和公式：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d=na_n-\frac{1}{2}n(n-1)d$

3.性质

①$a_m-a_n=(m-n)d$，其中a_m，a_n为第m，n项；

②等差中项：a，b，c成等差数列，b叫作a与c的等差中项，则$2b=a+c$；

③若$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$；

④S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，$\cdots$成等差数列。

二、等比数列

1.通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}\ (n\in\mathbf{N}^*,\ a_1\neq 0,\ q\neq 0)\ (n\in\mathbf{N}^*)$

2.前n项和公式：$S_n=\begin{cases}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-qa_n}{1-q}(q\neq 1)\\ na_1(q=1)\end{cases}$

3.性质

①$\frac{a_m}{a_n}=q^{m-n}$，其中a_m，a_n为第m，n项；

②若$m+n=p+q$，则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$；

③等比中项：a，b，c成等比数列，b叫作a与c的等比中项，则$b^2=a\cdot c$；

④S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，$\cdots$成等比数列。

第四章　推理与证明

一、合情推理和演绎推理

1.合情推理

合情推理包括归纳推理和类比推理。

2.演绎推理

“三段论”是演绎推理的一般形式，包括：大前提—已知的一般原理；小前提—所研究

的特殊情况；结论—根据一般原理，对特殊情况做出的判断。

二、直接证明与间接证明

1.直接证明

常见的直接证明方法有综合法和分析法。

2.间接证明

常见的间接证明有：反证法。

三、数学归纳法

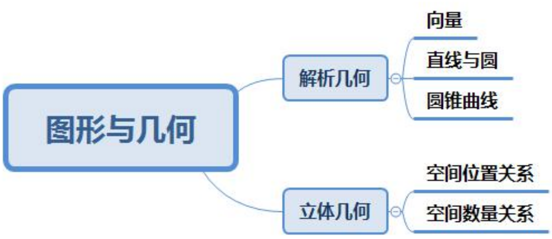
数学归纳法证明命题的步骤：

（1）证明当取第一个值时命题成立；

（2）假设时，命题成立，证明当时命题也成立；

由（1）、（2）就可以断定命题对从开始的所有正整数都成立。

第二部分　图形与几何



第一章　解析几何

一、向量

1.数量积

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos<\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>$，$<\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>\in[0，\pi]$。其中，$|\boldsymbol{b}|\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\in\mathbf{R}$，称为$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$方向上的投影。

2.平面向量的坐标运算

（1）若$\boldsymbol{a}=(x_1，y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2，y_2)$，则有：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$。

（2）若$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则有：$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

A、B两点间距离为$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$。

3.向量平行：$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$的充要条件是$x_1y_2-x_2y_1=0$。

4.向量垂直：设$\boldsymbol{a}=(x_1，y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2，y_2)$，则有：

（1）向量式：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

（2）坐标式：$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$；

二、直线与圆

1.直线方程的五种形式

（1）点斜式：$y - y_0 = k(x - x_0)$；

（2）斜截式：$y = kx + b$；

（3）两点式：$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$；

（4）截距式：$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$；

（5）一般式：$Ax + By + C = 0$。

2.点到直线的距离

已知点(x_0, y_0)与直线$Ax + By + C = 0$，则点到直线的距离为$d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$。

3.平行线间距离

若l_1：$Ax + By + C_1 = 0$，l_2：$Ax + By + C_2 = 0$，则$d = \dfrac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$。

注意：x，y对应项系数应相等。

4.两直线间位置关系

设直线l_1：$y = k_1x + b_1$或$A_1x + B_1y + C_1 = 0$，

直线l_2：$y = k_2x + b_2$或$A_2x + B_2y + C_2 = 0$。

（1）平行：$k_1 = k_2$且$b_1 \neq b_2$；或者$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$且$A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$。

（2）重合：$k_1 = k_2$且$b_1 = b_2$；或者$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$且$A_1C_2 - A_2C_1 = 0$。

（3）相交：$k_1 \neq k_2$；或者$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$。

（4）垂直：$k_1 \cdot k_2 = -1$；或者$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$。

5.圆的方程

（1）标准方程：$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$，$(a, b)$——圆心，$r$——半径。

（2）一般方程：$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$，$(D^2 + E^2 - 4F > 0)$，其中，$(-\dfrac{D}{2}, -\dfrac{E}{2})$——圆心，$r = \dfrac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$——半径。

（3）参数方程：$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$，（$a$，$b$）——圆心，$r$——半径。

三、圆锥曲线

1.椭圆

（1）标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

（2）定义域：$\{x|-a \le x \le a\}$；值域：$\{y|-b \le y \le b\}$；

（3）长轴长$2a$，短轴长$2b$，焦距：$2c$；

（4）准线方程：$x=\pm\dfrac{a^2}{c}$。

2.双曲线

（1）标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）

（2）定义域：$\{x|x \ge a或x \le a\}$；值域为R；

（3）实轴长$2a$，虚轴长$2b$，焦距$2c$；

（4）准线方程：$x=\pm\dfrac{a^2}{c}$。

3.抛物线

（1）标准方程：$y^2=2px$（$p>0$），p：焦参数

（2）焦点：（$\dfrac{p}{2}$,0），通径为$2p$；

（3）准线：$x=-\dfrac{p}{2}$；

（4）焦半径：$|AF|=x_1+\dfrac{p}{2}$，过焦点弦长$|AB|=x_1+x_2+p$。

第二章　立体几何

一、空间位置关系

1.直线与直线的位置关系

（1）相交；（2）平行；（3）异面。

2.直线与平面的位置关系

（1）线在面内；（2）线在面外：相交或平行。

3.平面与平面的位置关系

（1）平面与平面平行；（2）平面与平面垂直。

二、空间数量关系

1.异面直线的夹角

①范围：$\theta\in(0,\frac{\pi}{2}]$。

②求法：（几何法）转化为相交两直线的夹角。

（向量法）$\theta=\arccos\frac{|\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2|}{|\boldsymbol{m}_1|\cdot|\boldsymbol{m}_2|}$，其中 $\boldsymbol{m}_1$、$\boldsymbol{m}_2$ 分别为异面直线 a、b 的方向向量。

2.直线与平面的夹角

①范围：$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$：当直线与平面垂直或平行（含直线在平面内）时，规定 θ 分别为 $\frac{\pi}{2}$ 和 0。

②求法：（定义法）作出直线在平面上的射影，找到线面角；

（射影法）设斜线段 AB 在平面 α 内的射影为 $A'B'$，则 AB 与 α 所成的角 θ，$\cos\theta=\frac{|A'B'|}{|AB|}$。

（向量法）$\theta=\arcsin\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}$，其中 $\boldsymbol{n}$ 为平面 α 内的法向量。

3.二面角

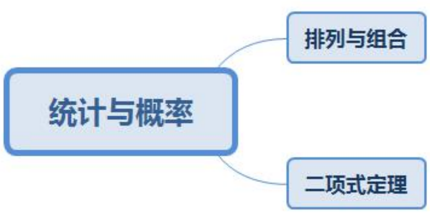
①二面角的范围：$[0,\pi]$。

②求法：（定义法）直接在二面角的棱上取一点（特殊点），分别在两个半平面内作棱的垂线，得出平面角，用定义法时，要认真观察图形的特性。

（几何法）已知二面角内一点到两个面的垂线时，过两垂线作平面与两个半平面的交线所成的角即为平面角，由此可知，二面角的平面角所在的平面与棱垂直。

（向量法）$\theta=\arccos\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}$ 或 $\pi-\arccos\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}$，其中 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 分别为平面 α、β 的法向量。

第三部分　统计与概率



第一章 排列与组合

1.排列

从n个不同的元素中，取$r(r\le n)$个不重复的元素的所有排列的个数称为从n个中取r个元素的排列数，用A_n^r表示，一般不说可重即无重。$A_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1)$

2.排列数的性质：$A_n^r=\dfrac{A_n^n}{A_{n-r}^{n-r}}=\dfrac{n!}{(n-r)!}$（$r$，$n\in\mathbf{N}$，$r\le n$）（规定$A_n^0=1$）。

3.组合

从n个不同的元素中，取r个不重复的元素的所有组合的个数称为从n个中取r个元素的组合数，用C_n^r表示。

$$C_n^r=\frac{A_n^r}{A_r^r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots2\cdot1}=\frac{n!}{(n-r)!r!}(r,\ n\in\mathbf{N},\ r\le n)\quad（规定C_n^0=1）。$$

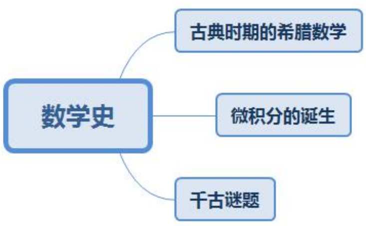
第二章 二项式定理

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$

二项展开式共有$n+1$项，其中第$r+1$项为$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r(r=0,1,\cdots,n)$，$C_n^r$为第$r+1$项的二项式系数。二项式系数和为$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^r+\cdots+C_n^n=2^n$，系数和为$(a+b)^n$。

注：项的系数与二项式系数是不同的两个概念，但当二项式的两个项的系数都为1时，系数就是二项式系数。如在$(ax+b)^n$的展开式中，第$r+1$项的二项式系数为C_n^r，第$r+1$项的系数为$C_n^ra^{n-r}b^r$；而$(x+\frac{1}{x})^n$的展开式中项的系数就是二项式系数。

第四部分 数学史



一、古典时期的希腊数学

1.伊奥尼亚学派

泰勒斯（公元前625－前547年），是伊奥尼亚学派的创始人。是现在所知的古希腊最早的数学家、哲学家，是古希腊数学的先行者。泰勒斯在数学上最深远的贡献是引入命题证明的思想。从泰勒斯开始，命题证明成为希腊数学的基本精神。

2.毕达哥拉斯学派

毕达哥拉斯（约公元前560－前480年），致力于哲学和数学的研究。

主要成就：（1）勾股定理与勾股形数。

（2）多边形数："多边形数"也称"形数"，就是形与数的结合物，用点排成的图形。

（3）不可公度：他们认为任何量都可以表示成两个整数之比。在几何上相当于说：对于任意给定的两条线段，总能找到第三条线段，以它为单位（即公度）线段将能给定的两条线段划分为整数段。

3.亚历山大学派时期

（1）欧几里得（公元前325－前265年）

《原本》是用公理化方法建立起演绎体系的最早典范。

（2）阿基米德（公元前287－前212年）

与牛顿（英，1642－1727年）、高斯（德，1777－1855年）并列，有史以来最伟大的三大数学家之一，有人把他称为"数学之神"。最为杰出的数学贡献是，在《圆的度量》中，，通过计算圆内接和外切正96边形的周长，求得圆周率约为3.14，这是数学史上第一次给出科学求圆周率的方法。

（3）阿波罗尼奥斯（兹）（约公元前262－前190年）

二、微积分的诞生

1.牛顿（英，1642－1727年）

创造性成果：二项定理（1665），无穷级数（1666）以及微积分基本定理。

2.莱布尼茨（德，1646－1716年）

莱布尼茨微积分思想的产生首先是出于几何的考虑，尤其是特征三角形的研究，如帕斯卡的特征三角形，关注自变量的增量Δx与函数的增量Δy为直角边组成的直角三角形。莱布尼茨看到帕斯卡的方法可以推广，对任意给定的曲线都可以作这样的无限小三角形，由此可"迅速地、毫无困难地建立大量的定理"。

三、千古谜题

1.三次、四次方程求根公式的发现。

2.高次方程可解性问题的解决。

3.伽罗瓦与群论。

4.古希腊三大几何问题的解决。

第五部分　高等数学

第一章　极限与连续

一、求极限的方法

1.直接代入法

代入法就是直接将要趋近的值代入函数表达式中，这种方法的前提条件是这个值能使函数有意义。

2.约公因子法

所趋近的值使得函数没有意义，因此需要进行约公因子，约公因子通常运用因式分解的方法。

3.最高次幂法

当函数是分式形式，且分子、分母都是多项式时，可以运用这种方法。主要是比较分子与分母次数的高低：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0},当n=m\\0,当n>m\\\infty,当n<m\end{cases}。$$

4.两个重要极限公式

（1）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{v\to0}(1+v)^{\frac{1}{v}}=\mathrm{e}$。

5.常用等价无穷小

当 $x\to0$ 时的常用的等价无穷小量有：

$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,e^x-1\sim x,\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x$

$(1+x)^2-1\sim 2x$；$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$；$a^x-1\sim x\ln a$。

6.洛必达法则

（1）法则1（$\frac{0}{0}$型）

设① $\lim f(x)=0$， $\lim g(x)=0$；② x 变化过程中， $f'(x)$， $g'(x)$ 皆存在；③ $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或$\infty$），则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A$（或∞）。

（2）法则2（$\frac{\infty}{\infty}$型）

设① $\lim f(x)=\infty$， $\lim g(x)=\infty$；② x 变化过程中， $f'(x)$， $g'(x)$ 皆存在；③ $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或$\infty$），则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A$（或∞）。

二、连续

1.函数在一点的连续

$y=f(x)$在点x_0处连续$\Leftrightarrow$ $f(x)$在x_0处既是左连续，又是右连续。

2.函数在区间内（上）连续

（1）如果函数$y=f(x)$在开区间(a, b)内的每一点都连续，则称$f(x)$在(a, b)内连续。

（2）如果$y=f(x)$在开区间(a, b)内连续，在区间端点a右连续，在区间端点b左连续，则称$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续。

三、函数间断点及其分类

1.第一类间断点

设x_0是函数$y=f(x)$的间断点，如果$f(x)$在间断点x_0处的左、右极限都存在，则称x_0是$f(x)$的第一类间断点。

第一类间断点包括可去间断点和跳跃间断点。

①可去间断点：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而$f(x)$在点$x_0$无定义，或有定义但$f(x_0)\neq A$，则称$x_0$为$f(x)$的可去间断点；

②跳跃间断点：若函数$f(x)$在点x_0的左、右极限都存在，但$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，则称点$x_0$为函数$f(x)$的跳跃间断点。

（2）第二类间断点

第一类间断点以外的其他间断点统称为第二类间断点。（至少一个单侧极限不存在。）

常见的第二类间断点有无穷间断点和振荡间断点。

第二章　导数与微分

一、求导法则

基本初等函数求导

1.$(C)'=0$

2.$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$，特别：$(x)'=1$，$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$(\dfrac{1}{x})'=-\dfrac{1}{x^2}$

3.$(a^x)'=a^x\ln a$，特别：$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

4.$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，特别：$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

5.$(\sin x)'=\cos x$　　$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$　　$(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\tan x\sec x$　　$(\csc x)'=-\cot x\csc x$

6.$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　　$(\mathrm{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

二、导数的应用

1.求曲线上一点处的切线方程与法线方程

切线方程：$y=f(x)$在点$(x_0,\ f(x_0))$处的切线方程为$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$。

法线方程：$y=f(x)$在点$(x_0,\ f(x_0))$处的法线方程$y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$。

2.求函数单调性

（1）如果在$(a,\ b)$内$f'(x)>0$，那么函数$y=f(x)$在$[a,\ b]$上单调增加；

（2）如果在$(a,\ b)$内$f'(x)<0$，那么函数$y=f(x)$在$[a,\ b]$上单调减少。

3.函数的极值与最值

（1）可导函数的极值的基本步骤是：

①确定函数$f(x)$的定义域；

②求导数$f'(x)$；

③求方程$f'(x)=0$的全部实根，$x_1<x_2<\cdots<x_n$，顺次将定义域分成若干个小区间，并列表：x变化时，$f'(x)$和$f(x)$值的变化情况。

④检查 $f'(x)$ 的符号并由表格判断极值。

（2）求函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值的步骤：

①求 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的极值；

②将第一步中求得的极值与 $f(a)$，$f(b)$ 比较，得到 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值与最小值。

三、微分中值定理

1.罗尔定理（Rolle 定理）：

若函数 $f(x)$ 满足：（1）在闭区间 $[a, b]$ 上连续；（2）在开区间 (a, b) 内可导；（3）$f(a)=f(b)$，则在 (a, b) 内至少有一点 $\xi\in(a, b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

2.拉格朗日中值定理（Lagrange 中值定理）：

设函数 $f(x)$ 满足：（1）在闭区间 $[a, b]$ 上连续；（2）在开区间 (a, b) 内可导，则在 (a, b) 内至少有一点，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

3.柯西中值定理

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：（1）在闭区间 $[a, b]$ 上连续，（2）在开区间 (a, b) 内可导，（3）对任一 $\xi\in(a, b)$，$g'(x)\neq 0$，则在开区间 (a, b) 内至少存在一点，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

第三章　积分

一、不定积分

1.基本公式

（1）$\int k\mathrm{d}x=kx+C$（k 为常数）　　（2）$\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$（$\mu\neq -1$）

（3）$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$　　（4）$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

（5）$\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$　　（6）$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

（7）$\int a^{x}\mathrm{d}x=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C$　　（8）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^{2}}=\arctan x+C$

（9）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^{2}x}=\int \sec^{2}x\mathrm{d}x=\tan x+C$　　（10）$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$

（11）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^{2}x}=\int \csc^{2}x\mathrm{d}x=-\cot x+C$　　（12）$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$

（13）$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$

2.积分方法

（1）第一类换元积分法（凑微分法）

定理1：设$F(u)$为$f(u)$的原函数，$u=\varphi(x)$可微，则

$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\ dx=[\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}$（第一类换元积分公式）。

（2）第二类换元积分法

定理2：设$x=\psi(t)$是单调的可导函数，且在区间内部有$\psi'(t)\neq 0$，又设$f[\psi(t)]\psi'(t)$具有原函数，则$\int f(x)dx=[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt]_{t=\psi^{-1}(x)}$。

其中$\psi^{-1}(x)$为$x=\psi(t)$的反函数。上式称为第二类换元积分公式。

（3）分部积分法

假定$u=u(x)$与$v=v(x)$均具有连续的导函数，则

$\int uv'dx=uv-\int vu'dx$，$\int udv=uv-\int vdu$。称为分部积分公式。

二、定积分

1.牛顿-莱布尼茨公式

如果函数$f(x)$在区间$[a, b]$上连续，且$F(x)$是$f(x)$的任意一个原函数，那么

$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$。

2.定积分的求法

（1）换元积分法

设函数$f(x)$在区间$[a, b]$上连续，并且满足下列条件：

①$x=\varphi(t)$，且$a=\varphi(\alpha)$，$b=\varphi(\beta)$；

②$\varphi(t)$在区间$[\alpha, \beta]$上单调且有连续的导数$\varphi'(t)$；

③当t从α变到β时，$\varphi(t)$从a单调地变到b，则有$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$。

（2）分部积分法

设函数$u=u(x)$和$v=v(x)$在区间$[a, b]$上有连续的导数，则有

$$\int_a^b u(x)dv(x)=[u(x)\ v(x)\ ]\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)。$$

第四章　级数

一、正项级数的判别

1.比较判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$是两个正项级数，如果存在某正数N，对一切$n>N$，都有$u_n\le v_n$，那么：①若级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；②若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$也发散。

2.比值判别法（达朗贝尔）

设$u_n>0$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则①当$\rho<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；②当$\rho>1$时（包括$\rho=+\infty$），则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散；③当$\rho=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$可能收敛也可能发散；

注：对于多项式形式或者对数多项式级数，本方法必定不能判定。

3.根值判别法（柯西判别法）

设$u_n\ge 0$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则①当$\rho<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；②当$\rho>1$时（包括$\rho=+\infty$），则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散；③当$\rho=1$时，级数可能收敛也可能发散。

二、交错级数的判别

莱布尼兹判别法

设交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足：

（1）$u_{n+1}\le u_n(n=1,2,3\cdots)$，即数列$\{u_n\}$单调递减；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$；

则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛，且$0<\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n<u_1$。

三、幂级数的收敛半径和收敛域

幂级数的收敛半径可如下求得：

设极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中$a_n,a_{n+1}$是幂级数相邻两项的系数，则①若$\rho\ne 0$，则$R=\frac{1}{\rho}$；②若$\rho=0$，则$R=+\infty$；③若$\rho=+\infty$，则$R=0$。

四、幂级数展开式

1.常见函数幂级数展开式

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots,\ \Omega=\mathbf{R}$$

$$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots，\Omega=\mathbf{R}$$

$$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots，\Omega=\mathbf{R}$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots，\Omega=\mathbf{R}$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots，\Omega=\mathbf{R}$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots，x\in(-1,1)$$

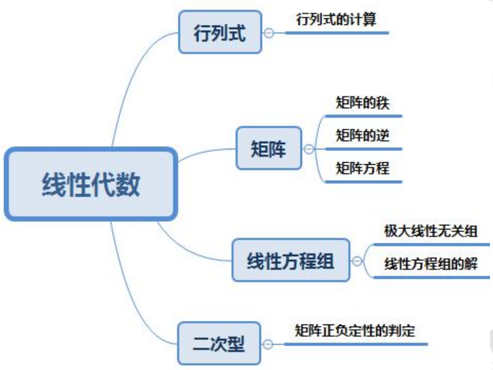
$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots，x\in(-1,1)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots，x\in(-1,1]$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots，x\in[-1,1)$$

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots，x\in[-1,1]$$

第六部分　线性代数



第一章　行列式

一、行列式的计算

1.对角线法

（1）二阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

（2）三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

即：二阶和三阶行列式的值等于主对角线元素的乘积减去副对角线元素的乘积。

2.化三角法

化三角形法：将行列式转化为上三角形或者下三角形行列式，这样所得行列式的值等于主对角线元素的乘积。

3.代数余子式法

将行列式按某一行（或列）展开，达到降阶的目的。

第二章　矩阵

一、矩阵的秩

1.定义：若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个非零 r 阶子式，且所有 $r+1$ 阶子式全为零，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，记为 $R(\boldsymbol{A})=r$。

2.求法：通过初等行变换将给定矩阵化为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数即为给定矩阵的秩。

二、矩阵的逆

1.求逆矩阵

定理 1：若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$。

定理 2：若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\boldsymbol{A}^{*}$，其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。

2.逆矩阵满足下述运算规律：

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 亦可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，数 $\lambda\neq 0$，则 $\lambda\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$；

（3）若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵且均可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 亦可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$。

三、求矩阵方程

常见的三种矩阵方程：

（1） $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$；

（2） $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$，解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$；

（3） $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$，解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$。

第三章 线性方程组

一、极大线性无关组

设有向量组 A，如果在 A 中能选出 r 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$，满足：①向量组 A_0：$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关；②向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量（如果 A 中有 $r+1$ 个向量的话）都线性相关，那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个极大线性无关向量组（简称极大无关组）。

二、线性方程组的解

1.设 n 元线性方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $R(\boldsymbol{A})$，其增广矩阵的秩为 $R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$，则

（1）若 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$，则该线性方程组无解；

（2）若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})=n$，则该线性方程组唯一解；

（3）若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})<n$，则该线性方程组有无穷多解。

2.齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 总是有解的，因为 $x_1=x_2=\cdots x_n=0$ 就是它的一个解。因此，齐次线性方程组的解有两种情况：（1）只有零解；（2）有非零解。

3. n 元非齐次线性方程组有解的充分必要条件是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})$ 的秩。

当 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=n$ 时，方程组没有自由未知量，只有唯一解。

当 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=r<n$ 时，方程组有 $n-r$ 个自由未知量，有无穷多个解。

第四章 二次型

一、矩阵正负定性的判定

（一）正定的

设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则以 3 个命题等价：

（1） $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 为正定的；

（2） $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 都大于零；

（3）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左上角各阶子式（称为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式）恒大于零。

即 $a_{11}>0$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \cdots\cdots \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$

（二）负定的

设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则以 3 个命题等价：

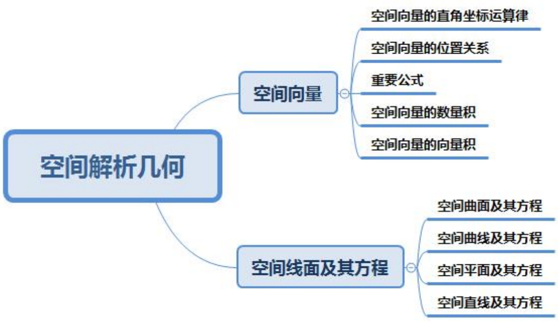
（1） $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 为负定的；

（2）$\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 都小于零；

（3）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左上角各阶子式（称为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式）负正相间。

即 $a_{11}<0$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots\cdots(-1)^n\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$

第七部分　空间解析几何



第一章　空间向量

一、空间向量的直角坐标运算律

若 $\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$，则

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,\ a_y-b_y,\ a_z-b_z)$，

$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z)$　$(\lambda\in\mathbf{R})$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$。

二、空间向量的位置关系

$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_x=\lambda b_x,\ a_y=\lambda b_y,\ a_z=\lambda b_z(\lambda\in\mathbf{R})$；$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$。

三、重要公式

1.模长公式

若 $\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$，则

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{b_x^{\ 2}+b_y^{\ 2}+b_z^{\ 2}}$。

2.空间两点间的距离公式

若 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$B(x_2,\ y_2,\ z_2)$，则 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$，

或 $d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$。

三、空间向量的数量积

空间向量数量积：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$

空间向量数量积的性质：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}\rangle$；$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$。

夹角公式：$\cos\langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$。

四、空间向量的向量积

1.两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积（外积）是一个向量 $\boldsymbol{c}$，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的模是 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角。

$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面（即 $\boldsymbol{c}$ 既垂直于 $\boldsymbol{a}$，又垂直于 $\boldsymbol{b}$），$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定。

2.向量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$。

第二章　空间线面及其方程

一、空间曲面及其方程

几种特殊的二次曲面

1.椭球面

把 xOz 面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转，所得的曲面称为旋转椭球面，其方程为 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，再把旋转椭球按沿 y 轴方向伸缩 $\dfrac{b}{a}$ 倍，便得椭球面方程：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$。

2.抛物面

①椭圆抛物面

把 xOz 面上的抛物线 $\dfrac{x^2}{a^2}=z$ 绕 z 轴旋转，所得曲面叫作旋转抛物面，再把此旋转曲面沿 y 轴方向伸缩 $\dfrac{b}{a}$ 倍，即得椭圆抛物面方程：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$。

②双曲抛物面（鞍形曲面）

以 l 为母线，L 为准线，母线 l 的顶点在准线 L 上滑动，且母线作平行移动，这样得到双曲抛物面的方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$。

3.双曲面

（1）单叶双曲面

把 xOz 面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转，得旋转单叶双曲面 $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，把此旋转曲面沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍，即得单叶双曲面方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$。

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 和 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 也是单叶双曲面。

（2）双叶双曲面

把 xOz 面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 x 轴旋转，得旋转双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$，把此旋转曲面沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{c}$ 倍，即得双叶双曲面方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 和 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 也是双叶双曲面。

二、空间曲线及其方程

1.空间曲线的一般方程：$\begin{cases}F(x, y, z)=0\\G(x, y, z)=0\end{cases}$。

2.空间曲线的参数方程：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t), & t\text{ 为参数。}\\z=z(t)\end{cases}$

三、空间平面及其方程

1.平面的点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$。

2.平面的一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0$。

3.几个常用的结论

设平面 1 和平面 2 的法向量依次为 $\boldsymbol{n}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ 和 $\boldsymbol{n}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$，则有：

①两平面垂直：$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$（法向量垂直）；

②两平面平行：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$（法向量平行）；

③两平面重合：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$；

④平面外一点到平面的距离公式：设平面外的一点$P_0(x_0, y_0, z_0)$，平面的方程为$Ax+By+Cz+D=0$，则点到平面的距离为$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$。

四、空间直线及其方程

1.直线的点向式方程：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$。

2.直线的参数方程：$\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\\ z=z_0+pt\end{cases}$，$t$为参数。

3.直线的一般式方程：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$。

第八部分　数学教学知识

1.学习概念主要有**概念形成**与**概念同化**两种基本形式。

2.概念之间的关系分为：**相容关系**和**不相容关系**。其中相容关系包括同一关系，交叉关系，从属关系，不相容关系包括矛盾关系和对立关系。

3.常见数学定义的方法

（1）原始概念：比如，代数中的集合，元素，对应等，几何中的点、线、面等。

（2）**属加种差定义**：**发生式定义**和**关系定义法**是比较特殊的两种定义方法。

（3）外延定义法：约定式定义是特殊的一种外延式定义。

（4）词语定义法：用词语说明被定义项的含义的方法。

（5）递归定义法：如用递推公式$a_n=a_{n-1}+d$定义等差数列。

4.中学常见的数学思想主要归纳为以下几个方面内容：符号思想、集合思想、**数形结合思想**、**函数与方程思想**、**转化与化归思想**、分类与整合思想、特殊与一般思想、有限与无限思想、或然与必然思想、归纳思想、类比思想、演绎思想、模型思想等。

5.教学设计

（1）课题；（2）课时；（3）课型；（4）教材分析；（5）学情分析；（6）教学目标；（7）教学重难点；（8）教学方法；（9）课前准备；（10）教学过程：①导入；②新授；③巩固；④小结；⑤作业；（11）板书设计；（12）教学反思。

第三模块 模拟题

第一部分 数与代数

1.设实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y-1\le 0 \\ x+y-1\le 0 \\ x\ge -1 \end{cases}$，则 x^2+y^2 的最大值为（ ）

A.0 B.$\frac{1}{2}$ C.$\sqrt{5}$ D.5

2.设函数 $y=f(x)$ 为最小正周期为 π 的奇函数，则 $f(x)$ 可能是（ ）

A. $f(x)=\sin x$ B. $f(x)=\tan 2x$

C. $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ D. $f(x)=\sin x\cos x$

3.函数 $f(x)=2\sin^2 x+2\sin x\cos x-1$ 的单调递减区间是（ ）

A. $\left[\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{7\pi}{8}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$ B. $\left[\frac{3\pi}{8}+2k\pi,\frac{7\pi}{8}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$

C. $\left[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$ D. $\left[-\frac{\pi}{8}+2k\pi,\frac{3\pi}{8}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$

4.已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2^{n+1}-k$，则 $k=$（ ）

A. -1 B.0 C.1 D.2

【参考答案】

DDAD

第二部分 图形与几何

1.半径为 R 的四分之一圆卷成一个圆锥，则它的体积为（ ）

A. $\frac{\sqrt{15}}{192}\pi R^3$ B. $\frac{\sqrt{15}}{64}\pi R^3$ C. $\frac{\sqrt{3}}{24}\pi R^3$ D. $\frac{\sqrt{15}}{8}\pi R^3$

2.若方程 $a^2x^2+(2a+3)y^2+2ax+a=0(a\in\mathbf{R})$ 表示圆，则 a 的取值是（ ）

A. $a=1$或$a=-3$ B. $a=3$或$a=-1$ C. $a=-1$ D. $a=3$

3.方程 $|x|-2=\sqrt{4-y^2}$ 表示的曲线是（ ）

A.两条射线 B.两个半圆 C.一个圆 D.两个圆

4.若双曲线的两焦点为 $F_1(0,-4)$，$F_2(0,4)$，双曲线的弦 AB 过点 F_1，若 $\triangle ABF_2$ 的周长为 24，且 $|AB|=8$，那么该双曲线的方程为（ ）

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ B. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$ C. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$ D. $\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{4}=1$

5.以椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的右焦点为圆心，且与直线 $2x-y+4=0$ 相切的圆的方程是（　　）

A. $x^2+y^2-6x-11=0$　　B. $x^2+y^2+6x-11=0$

C. $x^2+y^2-6x-29=0$　　D. $x^2+y^2+6x-29=0$

【参考答案】

ACBCA

第三部分　统计与概率

1.设一组正数 x_1，x_2，x_3，x_4 的方差 $S^2=\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-4)$，则数据 x_1，x_2+1，x_3+1，x_4+2 的平均数是（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

2.设 $(5x-\frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式的各项系数和为 M，二项式系数和为 N，若 $M-N=240$，则展开式中 x 的系数为（　　）

A.-150　　B.150　　C.300　　D.-300

【参考答案】

BB

第四部分　数学史

1.1834年有位数学家发现了一个处处连续但处处不可微的函数例子，这位数学家是（　　）

A.高斯　B.波尔查诺　C.魏尔斯特拉斯　D.柯西

2.下列选项不属于欧几里得《原本》中的公设的是（　　）

A.从任一点到另一点可以引一直线

B.有限直线可以无限延长

C.若两条直线与另一条直线相交，所成的同旁内角之和小于两直角，则此两直线必在这一侧相交

D.直线上的点是同样放置的

3.建立了复变函数的微分和积分理论，并有“现代分析之父”之称的数学家是（　　）

A.牛顿　B.高斯　C.柯西　D.莱布尼兹

【参考答案】

BDC

第五部分　大学数学

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 的值是（　　）

A.0　　B.$\dfrac{1}{2}$　　C.1　　D.2

2.下列命题中正确的是（　　）

A.若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 $R\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{1}{R}$

B.若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 不存在，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 没有收敛半径

C.若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n x^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$

D.若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$

3.设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则 $\boldsymbol{A}$ 中（　　）

A.所有 $r-1$ 阶子式都不为 0　　B.所有 $r-1$ 阶子式都为 0

C.至少有一个 r 阶子式不为 0　　D.所有 r 阶子式都不为 0

4.二次型 x^2-xy+y^2 是（　　）

A.正定的　　B.负定的

C.不定的　　D.以上都不是

5.方程 $z=x^2+y^2$ 表示的二次曲面是（　　）

A.圆柱面　　B.旋转抛物面　　C.圆锥面　　D.双曲抛物面

6.由函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图像与三条直线 $y=-2x$，$x=1$，$x=3$，所围成的封闭图形的面积为__________。

7.计算：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x=$_________。

8.已知 a，$b\in\mathbf{R}^+$，若行列式 $\begin{vmatrix}a & b\\ -1 & 1\end{vmatrix}$ 的值为 1，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值是_________。

9.已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=$_________。

10.已知函数 $f(x)=x^2+4\ln x$。

（1）求函数 $f(x)$ 在 $[1,\ \mathrm{e}]$ 上的最大值和最小值；

（2）证明：当 $x\in[1,+\infty]$ 时，函数 $f(x)$ 的图像在函数 $g(x)=2x^3$ 的图像下方。

【参考答案】

1-5 BDCAB；6. e^3-e+8；7. $\frac{1}{2}\ln 2$；8.4；9. $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$；

10.【答案】（1）$f(x)_{\min}=1$，$f(x)_{\max}=e^2+4$；（2）见解析。

【解析】（1）由题意得：$f'(x)=2x+\frac{4}{x}$，当 $x\in[1,\ e]$ 时，$f'(x)=2x+\frac{4}{x}>0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在 $x\in[1,\ e]$ 上为单调递增函数，故 $f(x)_{\min}=f(1)=1$，$f(x)_{\max}=f(e)=e^2+4$。

（2）证明：当 $x\in[1,+\infty]$ 时，函数 $f(x)$ 的图像在函数 $g(x)=2x^3$ 的图像下方，即 $x^2+4\ln x<2x^3$ 在 $[1,+\infty]$ 上恒成立，即 $2x^3-x^2-4\ln x>0$ 在 $[1,+\infty]$ 恒成立。令 $h(x)=2x^3-x^2-4\ln x$，则 $h'(x)=6x^2-2x-\frac{4}{x}=\frac{6x^3-2x^2-4}{x}=\frac{2(x-1)\cdot(3x^2+2x+2)}{x}$。当 $x\in[1,+\infty]$ 时，$x-1\geq 0$，$3x^2+2x+2>0$ 恒成立，所以 $h'(x)\geq 0$ 恒成立，即 $h(x)$ 在 $[1,+\infty]$ 上单调递增，则 $h(x)\geq h(1)=1$，故 $h(x)>0$ 恒成立。

第六部分　数学教学知识

1.关于数学推理，以下说法正确的是（　　）

①数学推理包括合情推理和演绎推理；②无论合情推理还是演绎推理所得到的结论都未必正确；③在解决数学问题的过程中，合情推理和演绎推理的功能不同；④推理是数学思维的基本方式。

A.①②③　　B.①②④　　C.①③④　　D.②③④

2.下列行为属于落实数学思考目标的是（　　）

A.初步形成评价与反思意识

B.体会数学特点，了解数学的价值

C.体会统计方法的意义，发展数据分析观念

D.经历数与代数的抽象，运算与建模等过程

3.数学课程体系编排的总原则不包括（　　）

A.数学学科的知识结构　　B.学生的认知结构

C.学生的心理结构　　D.联系实际

4.对于问题："完成下列计算 $1+3=?$，$1+3+5=?$，$1+3+5+7=?$……根据计算结果，探究规律"的教学，应让学生经历（　　）的过程。

A.观察-比较-归纳-猜想

B.观察-归纳-比较-猜想

C.猜想-比较-观察-归纳

D.猜想-观察-比较-归纳

5.（　　）是学习者对学习目标、学习内容学习方式乃至学习评价的自主建构、选择、监控、反思和调节的方式。

A.合作学习　B.探究学习　C.自主学习　D.发现学习

6.在求解“若函数 $f(x)=\log_{a^2-3}^{ax+4}$ 在 $[-1,1]$ 上是单调增函数，则实数 a 的取值范围是_______。”过程中蕴含的数学思想有（　　）

A.分类与整合　B.有限与无限　C.模型思想　D.类比思想

7.什么是数学概念形成？数学概念形成的学习过程分为哪几个阶段？

【参考答案】

1-6　CCDACA

7.【参考答案】所谓数学概念形成，是指在教学条件下，从大量的实际例子出发，经过比较、分类，从中找出一类事物的本质属性，然后再通过具体的例子对所发现的属性进行检测，最后通过概括得到定义并用符号表达出来。这种获得数学概念的方式叫作数学概念形成。

数学概念形成的过程可以分为以下几个阶段：（1）观察实例；（2）分析共同属性；（3）抽象本质属性；（4）确认本质属性；（5）概括定义；（6）具体运用。