2019考研线性代数、概率知识导图

华图教育 HUATU.COM SINCE 2001

线性代数

- 向量组
  - 相关概念
    - n 维向量组 $\alpha\cdots\alpha_m$,若有数组 $k_1,\cdots,k_m$ 不全为 0,使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$:线性相关
    - n 维向量组 $\alpha_1,\cdots\alpha_m$,如果 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 必有 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$:线性无关
    - n 维向量组:$\alpha_1\alpha_{\dots}\alpha_m$ 和向量 β,若存在 $k_1,k_2\cdots k_m$ 使得 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$:线性表示
  - 线性相关判定
    - 充要条件
      - 齐次线性方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0$ 有非零解
      - 存在某向量 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,S)$ 可由其余 $S-1$ 个向量数性表示
      - 向量组的秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)<S$
      - 若 $S=n,|\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n|=0$
    - 充分条件
      - 向量组中有零向量或坐标成比例的向量
      - 向量个数 $S>n$
      - 向量组中有一个部分线性相关
      - $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 的延伸组线性无关
  - 定义法
  - 线性无关判定
    - 充要条件
      - 齐次线性方程组 $(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0$ 只有零解
      - 每一个向量 $\alpha_1(i=1,2,\cdots,S)$ 均不能由其余 $S-1$ 个向量线性表示
      - 向量组的秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)=S$
      - 若 $S=n,|\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n|\neq0$
    - 必要条件
      - $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 线性无关,那么这经的任意部分组线性无关。
      - $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 线性无关,则其延伸组亦线性无关。
  - 向量组的秩与极大无关组
    - 向量组 T,若在 T 中有 r 个向量,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 线性无关;且 T 中任意 $r+1$ 个向量线性相关。 :定义
    - 与矩阵关系
      - $r(A)=$ 矩阵 A 行向量组的秩 $=$ 矩阵 A 列向量组的秩。
      - 经初等变换,矩阵和向量组的秩不变。
      - 向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示,则 $r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})$
      - 向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示,且 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$ 则(Ⅰ)与(Ⅱ)等价。
    - 施密特正交化
      - 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性无关,令:$\beta_1=\alpha_1$,
      - $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$,
      - $\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$,
      - $\beta_m=\alpha_n-\frac{(\alpha_m,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_m,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_m,\beta_{m-1})}{(\beta_{m-1},\beta_{m-1})}\beta_{m-1}$。
      - $\gamma_i=\frac{\beta_i}{|\beta_i|}$ $i=1,2,\cdots,m.$ $\gamma_1,\gamma_2,\cdots\gamma_m$ 为 α 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 的规范正交向量组.
- 线性方程组
  - 解的判定
    - 齐次
      - $\gamma(\text{Amxn})<n\Leftrightarrow \text{Amxn}x=0$ 有非零解(无需多解)
      - $\gamma(\text{Amxn})=n\Leftrightarrow \text{Amxn}x=0$ 只有零解(唯一解)
    - 非齐次
      - $\gamma(\text{Amxn})\neq\gamma(\text{Amxn}\vdots\text{b})\Leftrightarrow \text{Amxn}x=\text{b}$ 无解
      - $\gamma(\text{Amxn})=\gamma(\text{Amxn}\vdots\text{b})=\gamma<n\Leftrightarrow \text{Amxn}x=\text{b}$ 有无穷多解
      - $\gamma(\text{Amxn})=\gamma(\text{Amxn}\vdots\text{b})=\gamma=n\Leftrightarrow \text{Amxn}x=\text{b}$ 有唯一解
  - 解的形式
    - $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{nr}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系,则其通解 $x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{nr}\eta_{nr}$
    - $Ax=b$ 的通解 $x=x_{齐}+\eta_0$.其中 η_0 为 $Ax=b$ 的一个特解.$x_{齐}$ 为 $Ax=0$ 的通解.
  - 齐次与非齐次关系
    - $Ax=b$ 唯一解 $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ $Ax=0$ 只有零解(唯一解)
    - $Ax=b$ 无穷多解 $\overset{\not\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ $Ax=0$ 有非零解(无穷多解)
- 二次型
  - 概念
    - $f(x_1,x_2,\cdots x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$ 定义
    - 只有平方项的二次型 $f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_{n-1}y_n^2-1+k_ny_n^2$ 标准形
    - 实二次型的标准形中,平方项的系数 $k_1,k_2,\cdots k_n$ 若为正记为 1,负记为 -1,0 记为 0,P $f=y_1^2+\cdots+y_P^2-y_{PH}^2\cdots\cdots y_{P+q}^2$ 为规范形,其中 P 为正惯性指数,q 为负惯性指数. 规范形
  - 配方法 正交换法 :化为标准形
  - 矩阵合同
    - n 阶对称矩阵 A,B,如果存在一个可逆矩阵 C,使得 $B=C^TAC$:定义
    - 两个实对称矩阵合同的充要条件是它们所对应的实二次型具有相同的惯性指数 :判断
  - 正定
    - 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)=X^TAx$,对任意非零向量 x,都有 $f(x)>0$ 定义
    - $f=X^TAx$ 正定$\Leftrightarrow$其标准形 n 个系数大于零$\Leftrightarrow$正惯性指数 $n\Leftrightarrow$A 的特征值大于零$\Leftrightarrow$A 的所有顺序主子式大于零$\Leftrightarrow$A 与 E 合同 判别法
- 概念:不同行不同列元素的乘积的代数和.
- 性质
  - 行列式与其转置行列式相等.
  - 互换行列式的两行(列),行列式变为原来的相反数.
  - 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以常数 k,等于用数 k 乘此行列式.
  - 行列式的某一行(列)的各元素乘以常数 k 加到另一行(列)对应的元素上,行列式不变.
- 展开式
  - $|A|=a_{k1}Ak_1+a_{k2}A_k2+\cdots+a_{kn}A_{kn}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 或 $|A|=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk}$ $(k=1,2,\cdots n)$
  - $a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=0$ $i\neq j$
- 计算
  - 数字型
    - 三角化法:利用行列式性质或展开式.
    - 公式法:上三角行列式、副对角线行列式、拉普拉斯展开式、范德蒙行列式。
    - 递推公式:
  - 抽象型
    - 行列式的性质
    - 矩阵的性质
    - 所有特征值之积
  - $|A|=0\Leftrightarrow Ax=0$ 有非零解$\Leftrightarrow r(A)<n<\Leftrightarrow0$ 是 A 的特征值$\Leftrightarrow|A|=-|A|$ (A 为方阵)
- 应用
  - $Ax=0$ 有非零解.
  - 伴随矩阵求逆.
  - A 可逆$\Leftrightarrow|A|\neq0$.
  - 克莱姆法则:
  - 特征值计算 $|\lambda E-A|=0$.
- 矩阵
  - 概念:mxn 个数排成 m 行 n 列的表格
  - 方阵幂的计算
    - $r(A)=1$
    - 找规律
    - $\begin{pmatrix}k & * \\ 0 & k\end{pmatrix}$
    - A 可相似对角化
  - 特殊矩阵:对称矩阵、反对称矩阵、上(下)三角矩阵、对角矩阵、伴随矩阵、正交矩阵
  - 初等变换
    - 初等矩阵
      - 初等矩阵 P 左乘 A 所得 PA 就是 A 作了一次与 P 同样的行变换.
      - $E_i^{-1}(k)=E_i(\frac{1}{k})$、$E_{ij}^{-1}=E_{ij}$ $E_{ij}^{-1}(A)=E_{ij}(-k)$
    - 等价矩阵
      - 经过初等变换后的矩阵与原矩阵等阶
      - 同型矩阵 A 与 B 等阶$\Leftrightarrow r(A)=r(B)$
  - 计算
    - 定义法
    - 初等变换 $(A\vdots E)\xrightarrow{行初等变换}(E\vdots A^{-1})$
  - 伴随矩阵 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$
  - 分块矩阵 $\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&B^{-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^{-}1=\begin{pmatrix}0&A\\A^{-1}&0\end{pmatrix}$
  - 证明
    - $|A|\neq0$
    - $r(A)=n$
    - 0 不是 A 的特征值
    - A 的行向量组或列向量组线性无关
  - 计算 初等变换法 定义法
  - 性质
    - $0\leqslant r(A_{mxn})\leqslant\min(m,n)$;$r(A_{mxn})=A\min$ 的特秩 $=A_{mxn}$ 的行秩;当 $k\neq0$ 时 $r(kA_{mxn})=r(A_{mxn})$
    - $r(A_mxn)=r(A_{mxn}^T)$;$r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)$;$r(AB)\leqslant\min(r(A),r(B))$
- 特征值与特征向量
  - 定义
    - 相似矩阵:存在可逆矩阵 $P,P^{-1}AP=B$ 则 A 与 B 相似.
    - $Ax=\lambda x(x\neq0)$ λ 为 A 的特征值,x 为 A 的属于特征值入的特征向量.
    - $|A-\lambda E|$ 或 $|\lambda E-A|$ 称为 A 的特征多项式
  - 计算
    - 特征值:令 $|\lambda E-A|=0$ 或 $|A-\lambda E|$ 称 $=0$ 解出 λ,即为特征值.
    - 特征向量:对于每一个特征值 λ_0,求出 $(\lambda_0E-A)x=0$ 的一个基础解 λ_0 的线性无关的特征向量通解为其全部特征向量.
  - 性质
    - λ 是 A 的特征值,x 是 A 对应的特征向量
    - $k\lambda,\lambda^m,\frac{1}{\lambda},\frac{|A|}{\lambda}$ 分别为 kA,A^{-1},A^* 的特征值,特征向量均为 x.
    - $\varphi(\lambda)=a_0+a_0\lambda+\cdots+a_n\lambda^n$ 是 $\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_nA^n$ 的特征值,x 为对应特征向量.
    - 若 n 阶方阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda,2,\cdots,\lambda_n$ 则:$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.
    - $r(A)=1$ 则 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$,$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$
    - 不同特征值对应的特征向量线性无关.特殊地对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交.
  - 可相似对角化充要条件
    - n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值.
    - A 的每个特征值,线性无关的特征向量个数恰好等于该特征值的重根数.
    - A^1 为对称矩阵.

概率统计

- 数字特征
  - 一维随机变量
    - 期望
      - 定义
        - 离散型 $EX=\overset{\infty}{\underset{i=1}{y}}XiP(Xi),Y=g(x),E(Y)=\overset{\infty}{\underset{i=1}{y}}g(Xi)P(Xi)$.
        - 连续性:$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx.Y=g(x),E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$.
      - 性质:(1)$E(aX\pm bY)=aEX\pm bEY$ (2)X 与 Y 独立,则 $E(XY)=EX\cdot EY$ (3)$E(c)=C$
    - 方差
      - 定义:$D(X)=E(X-EX)^2=EX^2-(EX)^2$
      - 性质:$D(X+C)=CX,D(CX)=C^2DX,D(C)=0,D(X+Y)=DX+DY+2cov(X,Y)$.
    - 常见分布的数学特征
      - 0-1 分布 :$B(1,P)$ $EX=P$ $DX=P(1-P)$
      - 二项分布:$B(n,P)$ $EX=nP$ $DX=nP(1-P)$
      - 泊松分布:$P(\lambda)$ $EX=\lambda$ $DX=\lambda$
      - 几何分布:$G(P)$ $EX=\frac{1}{P}$ $DX=\frac{1-P}{P^2}$
      - 均匀分布:$U(a,b)$ $EX=\frac{a+b}{2}$ $DX=\frac{(b-a)^2}{12}$
      - 指数分布:$E(\lambda)$ $EX=\frac{1}{\lambda}$ $DX=\frac{1}{\lambda^2}$
      - 正态分布:$N(\mu,\sigma^2)$ $EX=\mu$ $D(X)=\sigma^2$
  - 二级随机变量
    - 协方差
      - 定义:$COVC(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)=EXY-EXEY$
      - 性质:$COVC(X,Y)=COVC(Y,X),COVC(ax,bY)=abCOVC(X,Y),COVC(X_1+X_2,Y)=COVC(X_1,Y)+COVC(X_2,Y)$.
    - 定义:$\rho_{XY}=\frac{COVC(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ 特殊地 $\rho=0$,X 与 Y 不相关. $|\rho|=1$,X 与 Y 线性相关.
    - (1)$|\rho|\leqslant1$ (2)X,Y 相互独立 $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}\rho_{XY}=0$ (3)$|\rho|=1$,X 与 Y 线性相关,αρ 存在常数 a,b 使 $\rho(X=aY+b)=1$.且 $\begin{cases}a>0\Leftrightarrow\rho=1\\a<0\Leftrightarrow\rho=-1\end{cases}$.
    - 期望 $E[g(X,Y)]=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)P_{ij} & (X,Y)离散型\\ \iint g(xy)f(x,y)dxdy & (X,Y)连续型\end{cases}$
- 大数定律及中心极限定理
  - $P(|X-EX|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2}$ 或 $P(|X-EX|<\varepsilon)\geqslant1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$ Chebyshev 不等式
  - 大数定律
    - $x_1,x_2,\cdots x_n$ 相互独立,$EX_k=\mu,DX_k=\sigma^2,\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_i$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|\overline{X}-\mu|<\varepsilon)=1$:Chebyshev 大数定律
    - n_k 是 n 次独立重复试验中 A 发生的次数,$P(A)=P$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{nA}{n}-P\right|<\varepsilon\right)=1$:Bernoulli 大数定律
    - $x_1,x_2\cdots x_n$ 独立同分布,且 $EX_k=\mu$,若 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_i$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|\overline{X}-\mu|<\varepsilon)=1$:辛钦大数定律
  - 中心极限定理
    - $x_1,x_2,\cdots x_n$ 独立同分布,$EX_i=\mu,DX_i=\sigma^2,i=1,2,\cdots,Y_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 的分布函数 $F_n(x)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t2}{2}}dt$. 独立同分布中心极限定理
    - n_A 表示 n 重 Bernoulli 试验中事件 A 出现次数,$P(A)=P$,则随机变量 $Y_n=\frac{n_k-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}$ 的分布函数 $F_n(x)$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t2}{2}}dt$. 拉普拉斯中心极限定理
- 数理统计基本概念
  - 统计量
    - $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$:样本均值
    - $S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$:样本方差
    - $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_i^k$:k 阶原点矩
    - $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$:k 阶中心矩
  - $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立. X 是总体,$EX=\mu,DX=\sigma^2$.则 $\overline{EX}=\mu,\overline{DX}=\frac{\sigma^2}{n},ES^2=\sigma^2,D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$ 统计量数字特征
  - 统计量的分布
    - 卡方分布
      - $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立同服从 $N(0,1)$ 分布,则 $X^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$ 服从自由度为 n 的卡方分布,纪为 $X^2\sim X^2(n)$. 定义
      - (1)$X_1^2\sim X_1^2(n_1),X_2^2\sim X_2^2(n)$,且 X_1^2,X_2^2 相互独立,则 $X_1^2+X_2^2\sim X^2(n_1+n_2)$ (2)$EX^2=n,DX^2=2n$. 性质
    - $X\sim N(0,1),Y\sim X^2(n)$,且 X 与 Y 相互独立 $T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从参数 n 的 t 分布,记为 $T\sim t(n)$ t 分布
    - $X\sim x^2(n),Y\sim x^2(m)$,$X$ 与 Y 相互独立 $F\frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从参数(n,m)的 F 分布,纪为 $F\sim F(n,m)$ F 分布
  - 统计量分布的运算
    - $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ $\frac{\overset{n}{\underset{i=1}{y}}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim X^2(n)$ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim X^2(n-1)$
    - $\frac{\overset{n}{\underset{i=1}{y}}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim X^2(OH)$ $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ 其中总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$
- 参数估计
  - 点估计
    - 总体 X 的分布中含有 m 个未知参数 $Q_1,Q_2,\cdots Q_m$,令 $E(X^k)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_i^k$ $k=1,2,\cdots m$.解出方程中 $Q_K(k=1,2,\cdots,m)$ 为 Q_k 的矩估计量纪为$\overline{OK}$. 矩估计
    - 第一步:$l(x_1x_2,\cdots,Q_1,\cdots Q_m)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(X_i,Q_1,Q_2,\cdots,Q_m)$;第二步:取对极 $\ln l$;第三步:求偏导数 $\frac{\partial\ln l}{\partial Q_i}.i=1,2,\cdots,m$ 第四步:令 $\frac{\partial\ln l}{\partial Q_i}=0$ 而求出 Q_i. 若有解即为所求最大似然估计,若无解则最大似然估计在边界上达到. 最大似然估计
  - 估计量评选标准
    - $E(\vec{Q})=Q$ 无偏估计
    - Q_1Q_2 均为 Q 的无偏估计,$D(Q_1)<D(Q_2)$,称 Q_1 比 Q_2 有效. 有效性
    - $\vec{Q}$ 的 Q 的估计量,若 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|\vec{Q}-Q|<\varepsilon)=1$ 即 $\vec{Q}\xrightarrow{P}Q,n\to\infty$,则称 $\vec{Q}$ 为 Q 的一致估计量. 一致性
  - 区间估计
    - Q 为总体 X 分布中的未知参数,$x_1,x_2\cdots x_n$ 为 x 的样本,存在 Q_1,Q_2 使得对给定的 $a(0<a<1)$ 有 $P(Q_1\leqslant Q\leqslant Q_2)=1-a$ 则称$[Q_1,Q_2]$为 Q 的置信度为 $1-a$ 的置信区间,Q_1,Q_2 分别为置信上限和下限.
- 假设检验
  - 第一步:由实际问题提出原假设 $H_。$(备选假设 H_1);
  - 第二步:选取适当的统计量,并在 H_0 的真的条件下确定统计量的分布;
  - 第三步:根据问题要求确定显著水平 a(题目会给),从而得到拒绝域;
  - 第四步:由样本观测值计算统计量的观测值,看是否属于拒绝域,从而对 H_0 作判断.
- 随机事件 概率
  - 概念:样本空间的子集,部分结果组成的集合.
  - 运算:$A\subset B$、$A\cup B(A+B)A-B(\overline{AB})$、$AB$.
  - 运算律
    - 交换律 $A\cup B=B\cup A,AB=BA$.
    - 结合律 $(A\cup B)\cup C=A,(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
    - 分配律 $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC).A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$
    - 德摩根律 $\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$
  - 关系
    - 互斥事件:若 $AB=\varphi$ 则 A、B 为互斥条件.
    - 对立事件:若 $AB=\varphi,A\cup B=\Omega$ 则 A,B 为对立事件.A 的对立事件记为$\overline{A}$.
  - 三大概型:古典概型、几何概型、伯努利概型
  - 常用公式
    - 加法公式:$P(A\cup B)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.
    - 减法公式:$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$
    - 乘法公式:$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$
    - 全概率公式:$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)+\cdots+P(B|A_n)P(A_n)$ $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间完备事件组.
    - 贝叶斯公式:$P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$
  - 独立事件
    - A 与 B 相互独立$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$
    - A、B、C 相互独立$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$ $P(AC)=P(A)P(C),P(BC)=P(B)P(C),P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.
- 离散型随机变量
  - (联合)分布函数
    - 一维随机变量
      - 定义:$F(x)=P(X\leqslant x)$
      - 性质:(1)$0\leqslant F(X)\leqslant1$;(2)单调不减;(3)$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\lim\limits_{n\to+\infty}F(x)=1$;(4)右连续.
    - 二维随机变量
      - 定义:$F(x,y)=P(X\leqslant x,Y\leqslant y)$
      - 性质:(1)$0\leqslant F(x,y)\leqslant1$ (2)$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,y)=1$ $\lim\limits_{n\to-\infty}F(x,y)=\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=0$
  - (联合)分布律
    - 一维随机变量:(1)$P_i\geqslant0,i=1,2,\cdots\cdots$ (2)$\sum\limits_{i=1}^{\infty}P_i=1$
    - 二维随机变量
      - 联合分布律:(1)$P_{ij}\geqslant0(i,j=1,2,\cdots\cdots)$;(2)$\sum\limits_{i=1,j=1}^{\infty}P_{ij}=1$.
      - 边缘分布
        - 关于 X 的边缘分布 $P_{i\cdot}=P(X=X_i)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}P_{ij}$ $(i,j=1,2,\cdots)$.
        - 关于 Y 的边缘分布:$P_{\cdot j}=P(Y=y_j)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P_{ij}$ $(i,j=1,2,\cdots)$.
      - 条件分布 $P(Y:y;|X=X_i)=\frac{P_{ij}}{P_i}$;$P(X=X_i|Y=y;)=\frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}$.
    - 常见分布
      - 0-1 分布 $\begin{array}{c|c|c}X&1&0\\\hline &P&1-P\end{array}$ $X\sim B(1,P)$
      - 二项分布 $P(X=k)=C_n^kP^kq^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n.$ $X\sim B(n,P)$
      - 泊松分布 $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\lambda>0,k=0,1,2\cdots.$ $X\sim P(\lambda)$
      - 几何分布 $P(X=k)=q^{k-1}P,k=1,2,3,\cdots.$ $X\sim G(P)$
    - 独立
      - X 与 Y 相互独立$\Leftrightarrow P_{ij}=P_{i\cdot}\cdot P_{\cdot j}$
      - X 与 Y 独立,h,g 为连续函数,则 $h(x)$ 和 $g(Y)$ 独立.
    - 随机变量函数的分布
      - X 的分布律的 $\begin{array}{c|c|c|c|c|c}X&x_1&x_2&\cdots&x_n&\cdots\\\hline P&p_1&p_2&\cdots&p_n&\cdots\end{array}$ 则 $Y=g(x)$ 的分布律为 $\begin{array}{c|c|c|c|c|c}Y&g(x_1)&g(x_2)&\cdots&g(x_n)&\cdots\\\hline P&p_1&p_2&\cdots&p_n&\cdots\end{array}$ (若某些 $g(X_i)$ 相等,则应将对应的 P_i 相加作为 $g(X_i)$ 的概率.)
      - X,Y 的联合分布律 $\begin{array}{c|c|c|c|c|c}Y\backslash X&x_1&x_2&\cdots&x_n&\cdots\\\hline Y_1&P_{11}&P_{21}&\cdots&P_{n1}&\cdots\\\hline Y_2&P_{12}&P\ 22&\cdots&P_{n2}&\cdots\\\hline \vdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\hline Y_n&P_{1n}&P_{2n}&\cdots&P_{nn}&\cdots\\\hline \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{array}$ 则 $Z=g(X,Y)$ 的联合分布律为 $\begin{array}{c|c|c|c|c|c}Z&g(X_1,Y_1)&g(X_1,Y_2)&\cdots&g(X_nY_n)&\cdots\\\hline P&p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{nn}&\cdots\end{array}$ (某些 $g(X_i,Y_j)$ 相等,则应将对应的 P_{ij} 相加作为 $g(X_i,Y_i)$ 概率.)
- 连续型随机变量
  - (联合)分布函数
    - 一维随机变量:定义与性质与离散型相似,只需把右连续改为连续其他完全相同.$F(x)=\int_{-\infty}^{X}f(t)dt$.
    - 二维随机变量:离散型的定义、性质均有,并且其他布为连续函数.
  - (联合)概率
    - 一维随机变量
      - (1)$f(x)\geqslant0$ (2)$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=1$ (3)$P(x_1<x\leqslant x_2)=F(x_1\leqslant x\leqslant x_2)=F(x_1<x<x_2)=P(x_1<x\leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1)$
      - (4)$F'(x)=f(x)$
    - 二维随机变量
      - 联合概率密度函数:(1)$f(x,y)\geqslant0$,(2)$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$.
      - 边缘概率密度:$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$;$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$.
      - 条件概率密度:$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$;$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$.
  - 常见分布
    - 均匀分布:$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a},a\leqslant x\leqslant b,\\0,\quad 其他,\end{cases}$ $x\sim\upsilon(a,b)$ $f(x,y)\begin{cases}\frac{1}{S_D},(x,y)\in D\\0,其他\end{cases}$ $(x,y)\sim\upsilon(D)$
    - 指数分布:$f(x)\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x},x>0\\0,x\leqslant0.\end{cases}$ $X\sim E(\lambda)$
    - 正态分布:$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$ $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. $f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma^1}\right)^2-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$
    - 标柱正态分布:$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $X\sim N(0,1)$ $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$
  - 独立
    - 正态分布关于独立的结论
      - 若 $X\sim Y(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)X$ 与 Y 独立,则(X,Y)服从二维正态分布.
      - 若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)X$ 与 Y 独立$\Leftrightarrow\rho=0$.
      - 若 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 相互独立服从正态分布,则 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 的线性组合服从正态分布.
    - X 与 Y 独立,h,g 为连续函数,则 $h(X)$ 和 $g(Y)$ 独立.
  - 随机变量函数
    - 一维随机变量
      - X 的概率密度为 $f(x)$ 则 $Y=g(X)$ 的分布函数 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(g(X)\leqslant y)$
      - 因此 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}$.
      - 公式法:$Y=g(x)$ 为单调函数,则关于 Y 的概率函数 $f_Y(y)=f(h(y))|h'(y)|$. $X=h(y)$ 为 $y=g(x)$ 的反函数.
    - 二维随机变量
      - 分布函数法.
      - 公式法:
        - (1)$Z=X+Y$ $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-X)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$
        - (2)$z=\max(X,Y)$,X 与 Y 独立. Z 的分布函数 $F_{\max}(z)=F_x(z)F_Y(z)$
        - (3)$z=\min(X,Y)$,X 与 Y 独立. Z 的分布函数 $F_{\min}(z)=1-[1-F_x(z)][1-F_Y(z)]$