2019考研高等数学知识导图

高等数学

多元函数微分学

函数、极限、连续

- 极限：设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的外域内有定义，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$，就有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$。则记 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$
- 连续性：若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续。否则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不连续。
- 连续函数性质：最值定理、介值定量

相关概念

- 二元函数 $z=f(x,y)$：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$
- 三元函数 $u=f(x,y,z)$：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_x(x,y,z)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$；$\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'_y(x,y,z)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y}$；$\dfrac{\partial u}{\partial z}=f'_z(x,y,z)=\lim\limits_{\Delta z\to0}\dfrac{f(x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta z}$
- 定理：如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$
- 全微分：如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $p(x,y)$ 的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+0(\rho)$，其中 A、B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ 而仅与 x、y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的全微分，记下 $dz=A\Delta x+B\Delta y$

计算

复合函数的导数：

① $z=f(u,v,w)$ 其中 $u=\varphi(x,y)$ $v=\psi(x,y)$ $w=g(x,y)$ 均在 (x,y) 处有连续偏导数则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial w}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial x}$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial w}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial y}$

② $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$ 均可导，则 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{du}{dx}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{dv}{dx}$

③ $z=f(x,u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 均有连续偏导数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}$

隐函数的导数：

由一个方程确定的隐函数：
- ① 由方程 $F(x,y)=0$ 确定隐函数 $y=y(x)$，则 $y'=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}(F'(x,y)\neq0)$
- ② 由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$

由方程组确定的隐函数（数一）：方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 确定隐函数 $u=u(x,y)$，则对方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 等式两边分别对 x,y 求导，可得 $\begin{cases}F'_x+F'_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F'_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\G'_x+G'_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+G'_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$ (1) $\begin{cases}F'_y+F'_u\dfrac{\partial u}{\partial y}+F'_v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\G'_y+G'_u\dfrac{\partial u}{\partial y}+G'_v\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$ (2) 分别解方程组(1)、(2)可得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\ \dfrac{\partial v}{\partial x}\ \dfrac{\partial v}{\partial y}$

应用

极值：
- 定义：函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个领域内有定义，对于该邻域内异于 (x_0,y_0) 的点满足 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$（或 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$）则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有极大值 $f(x_0,y_0)$（或极小值 $f(x_0,y_0)$）。
- 必要条件：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，则它在该点的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$
- 充分条件：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且二阶偏导数连续，又 $f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$，令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$c=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则 ①$AC-B^2>0$ 时具有极值，且当 $A<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 为极大值。$A>0$ 时 $f(x_0,y_0)$ 为极小值；②$AC-B^2<0$ 时没有极值；③$AC-B^2=0$ 时，不能判断，需另作讨论。
- 条件极值：求函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值：（拉格朗日乘数法）构造拉格朗日函数 $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，对该函数求偏导数并令其偏导数等于 0，即 $\begin{cases}f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0\\f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0\\\varphi(x,y)=0\end{cases}$ 解出 $(x,y)=(x_0,y_0)$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值

几何应用：
- 空间曲线的切线和法平面方程：曲线 P 的参数方程为 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$ $P(x_0,y_0,z_0)$ 为 P 上的点，则在点 (x_0,y_0,z_0) 的切线与法平面方程分别为：$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$；$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$
- 空间曲面的切平面和法线方程：
  - $P(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面 $Z=f(x,y)$ 上的点，则过点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面与法线方程分别为：$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_P(x-x_0)+\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_P\cdot(y-y_0)-(z-z_0)=0$；$\dfrac{x-x_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P}-\dfrac{y-y_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P}=\dfrac{z-z_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial z}\right|_P}$ ①
  - $P(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面 $F(x,y,z)=0$，则过点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面与法线方程为：$F'_x|_P\cdot(x-x_0)+F'_y|_P\cdot(y-y_0)+F'_z|_P\cdot(z-z_0)=0$；$\dfrac{x-x_0}{F'_x|_P}=\dfrac{y-y_0}{F'_y|_P}=\dfrac{z-z_0}{F'_z|_P}$ ②
- 方向导数（数一）：若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 可微，则 f 在点 P 片沿 $\vec l$ 的方向导数存在，且其方向导至 $f'_{\vec l}(P)=f'_x(P)\cos\alpha+f'_y(P)\cos\beta+f'_z(P)\cos\delta$.（$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向 $\vec l$ 的方向余弦）对于二元函数 $f(x,y)$，相应 f 在 $P(x_0,y_0)$ 处沿 $\vec l$ 的方向导数 $f'_{\vec l}(P)\cos\alpha+f'_y(P)\cos\beta$。其中 α,β 是 $\vec l$ 的方向角。
- 梯度（数一）：$P(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 上一点，在 P 点具有一阶连续偏导数，则点 P 处的梯度 $\mathrm{grad}f(x_0,y_0)=(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0))=f'_x(x_0,y_0)\vec i+f'_y(x_0,y_0)\vec j$；对于三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 相应的梯度 $\mathrm{grad}f(x_0,y_0,z_0)=(f'_x(x_0,y_0,z_0),f'_y(x_0,y_0,z_0),f'_z(x_0,y_0,z_0))=f'_x(x_0,y_0)\vec i+f'_y(x_0,y_0)\vec j+f'_z(x_0,y_0,z_0)\vec k$.

重积分

二重积分

定义：$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

性质：
- $\iint\limits_D[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]d\sigma=\alpha\iint\limits_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 其中 α,β 为任意常数
- $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_{D_1}\rho f(x,y)d\sigma+\int_{D_2}\rho f(x,y)d\sigma$ $D=D_1\cup D_2$ $D_1\cap D_2=\varphi$
- $\iint\limits_D|d\sigma=\iint\limits_D d\sigma=S_D$
- 对任意 $(x,y)\in D$，$f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\leqslant\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$
- 设 M,m 分别是 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ 是 D 的面积，则 $m\sigma\leqslant\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\leqslant M\sigma$
- 设函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，σ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\cdot\sigma$

计算：
- 直角坐标：X 型区域、Y 型区域
- 极坐标：$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$ $(x=r\cos\theta,y=r\sin\theta)$
- 对称性：
  - $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_{y\geqslant0}}f(x,y)dxdy, & f(x,y)\text{关于 }y\text{ 为偶函数}\\0, & f(x,y)\text{关于 }y\text{ 为奇函数}\end{cases}$ D 关于 x 轴对称
  - $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_{x\geqslant0}}f(x,y)dxdy, & f(x,y)\text{关于 }x\text{ 为偶函数}\\0, & f(x,y)\text{关于 }y\text{ 为奇函数}\end{cases}$ D 关于 y 轴对称
  - $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=2\iint\limits_D f(y,x)dxdy=\iint\limits_D f(y,x)dxdy$ D 关于 $y=x$ 对称

三重积分（数一）

二重积分的完全推广 定义与性质

计算：
- 直角坐标
- 柱面坐标：$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=\iiint\limits_\Omega f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)rdrd\theta dz$ $(x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z)$
- 球坐标：$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=\iiint\limits_\Omega f(r\sin\phi\cos\theta,r\sin\phi\sin\theta)r^2\sin\phi drd\phi d\theta$ $x=r\sin\phi\cos\theta,z=r\cos\phi$
- 对称性：$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=\begin{cases}0 & f(x,y,-z)=f(x,y,z)\\2\iiint\limits_{\Omega_{z\geqslant0}}f(x,y,z)dxdydz & f(x,y,-z)=f(x,y,z)\end{cases}$ Ω 关于 xoy 对称（类似地可应用到关于其他坐标面的对称性）
- 将 x,y,z 互换，Ω 不变：若将 (x,y,z) 互换，Ω 不变，则 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=\iiint\limits_\Omega f(x,z,y)dv=\iiint\limits_\Omega f(y,z,x)dv=\cdots$

重积分的应用

- 薄片的质量、质心：薄片的质量 $M=\iint\limits_D\rho(x,y)dxdy$ 质心坐标 $(\bar x,\bar y)$，$\bar x=\dfrac{\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D\rho(x,y)dxdy}$，可 $=\dfrac{\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D\rho(x,y)dxdy}$；$\rho(x,y)$ 为平面薄片的密度，D 为薄片在 x_0y 面上的投影。当密度 $\rho=$ 常数时，质心为形心。
- 薄片关于 x、y 轴及原点转动惯量：$J_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)dxdy$，$J_y=\iint\limits_D x^2\rho(x,y)dxdy$，$J_0=\iint\limits_D(x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy$
- 空间 Ω 的质量、质心：质量 $M=\iiint\limits_\Omega\rho(x,y,z)dxdydz$。质心坐标 $(\bar x,\bar y,\bar z)$ $\bar x=\dfrac{\iiint\limits_\Omega x\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_\Omega\rho(x,y,z)dxdydz}$，可 $\dfrac{\iiint\limits_\Omega y\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_\Omega\rho(x,y,z)dxdydz}$，$\bar z=\dfrac{\iiint\limits_\Omega z\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_\Omega\rho(x,y,z)dxdydz}$
- 空间 Ω 关于 x、y 轴及原点的转动惯量：$J_x=\iiint\limits_\Omega(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$，$J_y=\iiint\limits_\Omega(x^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$，$J_z=\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz$，$J_0=\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$

曲线积分与曲面积分

曲线积分

- 第一类曲线积分：曲线 l 的参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，$(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 则 $\int_l f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$.
- 第二类曲线积分：有向曲线 L 的参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，起点 A 对应参数 α，终点 B 对应参数 β，则 $\int_{AB}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int_\alpha^\beta\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)dt$
- 格林公式：设 x_0y 平面上有界闭区域 D 由一条逐段光滑闭曲线 l 所围成的单连通区域；l 为逆时针方向且 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上有连续一阶段导数，则有 $\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$

曲面积分

- 第一类曲面积分：曲面 $S:z=z(x,y)$ $(x,y)\in D$ $z(x,y)$ 在 D 上有连续偏导数，$f(x,y,z)$ 在 S 上连续，则 $\iint\limits_S f(x,y,z)ds=\iint\limits_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{H\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$
- 第二类曲面积分：曲面 $S:z=z(x,y)$ $(x,y)\in D_{xy}$ $z(x,y)$ 在 D_{xy} 上连续，$f(x,y,z)$ 在 S 上连续，则 $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdydz=\pm\iint\limits_D R[x,y,z(x,y)]dxdy$ 其中曲面 S 指定一侧所法向量与 z 轴正向成锐角取正号，成钝角取负号。这样把曲面积分化为 xoy 上二重积分，其他两部分类似。
- 高斯公式：$\oiint\limits_{S\text{外侧}}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_\Omega\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$
- 斯托克斯公式：l 是逐段光滑闭曲线，S 是以 l 为边界的有向曲面，l 与 S 符合右手法则，P,Q,R 有连续一阶偏导数，则 $\int_l Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_S\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\P & Q & R\end{vmatrix}$
- 应用：逐量、散度、环流量旋度

向量代数与空间解析几何

向量

- $\vec a=(x_1,y_1,z_1)$ $\vec b(x_2,y_2,z_2)$
- 数量积：$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=\vec a\cdot\vec b$
- 向量积：$\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\vec a\times\vec b$
- 平行：$\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}\Leftrightarrow\vec a/\!/\vec b$
- 垂直：$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0\Leftrightarrow\vec a\perp\vec b$
- $\cos\delta=\dfrac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$ $\vec a$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的方向余弦.

平面与直线

平面方程：
- 一般式：$Ax+By+Cz+D=0$
- 点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
- 三点式：$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\x-x_2 & y-y_2 & z-z_2\\x-x_3 & y-y_3 & z-z_3\end{vmatrix}=0$
- 平面束方程：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

直线方程：
- 一般式：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_0=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$
- 对称式：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$
- 参数方程：$x=x_0+mt$，$y=y_0+nt$ $z=z_0+pt$
- 两点式：$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$

曲面与曲线

曲面：
- 曲面方程：$F(x_1y_1)=0$
- 旋转曲面：以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面。旋转曲线和定直线依次称为母线和轴。
- 柱面：平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 l 形成的转变.

曲线方程：
- 一般式：$\begin{cases}F(x_1y_1z)=0\\G(x_1y_1z)=0\end{cases}$
- 参数方程：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$

函数、极限、连续

- 复合函数的计算：
- 函数的性质：有界性、单调性、奇偶性、周期性.

函数极限的计算

- 等价无穷小替换：$x\to0$ 时 $\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim x$；$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$ $a^x-1\sim\mathrm{In}a\cdot x$ $(1+x)^a-1\sim ax$
- 洛必达法则：(1) 当 $x\to*$ 时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零；(2) $f(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq0$；(3) $\lim\limits_{x\to*}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大）$\Rightarrow\lim\limits_{x\to*}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to*}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$
- 运算法则：
  1. 有限个无穷小的和是无穷小.
  2. 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.
  3. 有限个无穷小的乘积是无穷小.
  4. 若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则 $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；当 $B\neq0$ 时 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$；$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$ n 为正整数
  5. 函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在 $E(x_0)$ 有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且当 $x\in E^0(x_0)$，有 $g(x)\neq u_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$

数列极限的计算

- 夹逼准则：数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 及 $\{E_n\}$ 满足下列条件：(1) 从某项起，有 $y_n\leqslant x_n\leqslant E_n$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{x\to\infty}E_n=a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$
- 定积分定义：函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n f(\xi k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$
- 单调有界：单调有界数列必有极限
- 转化成函数极限：$\lim\limits_{x\to\infty}a(x)$
- 常数项级数收敛的必要条件 若常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

连续性

- 连续点：$\lim\limits_{n\to x_0}f(x)=f(x_0)$
- 第一类间断点：①可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；②跳跃间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$
- 第二类间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 至少有一个不存在

一元函数微分学

定义

- 可微：$\Delta y=A\Delta x+0(\Delta x)$ A 与 Δx 无关
- 可导：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0)+\Delta x-f(x_0)}{\lim\limits_{\Delta x\to0}x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导
- 高级导数：$f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$

计算

- 导数公式表
- 导数四则运算法测：
- 复合函数 $y=f[g(x)]$ 求导：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dy}\dfrac{du}{dx}$ $(u=g(x),y=f(u))$
- 反函数的导数：函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $x=h(g)$ 则 $h'(y)=\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{f'(x)}$
- 参数方程的导数（数一、二）参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y''(+)x'(t)-y'(t)x'(t)}{x'^3(t)}$
- 变限积分函数的导数 变限积分函数 $F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(t)dt$ 则 $F'(x)=f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

应用

- 几何应用：若函数 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的导数为 $f'(x_0)\neq0$，则其切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$；法线方程为 $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$
- 单调性与凹凸性
- 极直与拐点
- 经济应用（数三）①$f(x)$ 对 x 的边际函数为 $f'(x)$ ②$f(x)$ 对 x 的弹性 $\eta=f'(x)\cdot\dfrac{x}{f(x)}$
- 物理应用（数一、二） 速度 变化率
- 曲率（数一、二） ①曲线 $y=y(x)$ 的曲率 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac32}}$ ②曲线 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ 的曲率 $K=\dfrac{|y''x'-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$

中值定理

1. 闭区间连续函数的性质：最值定理、介值定理、零点定理
2. 微分中的定理：罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理、泰勒公式
3. 积分中值定理：如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，那么至少存在一点 $\xi\in[a,b](\xi\in(a,b))$ 使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

一元函数积分学

不定积分

- 定义：$\int f(x)dx=F(x)+C\Leftrightarrow F'(x)=f(x)$
- 计算：1. 积分公式表 2. 换元法 3. 分部积分法 $\int uv'dx=\int udv=uv-\int vdu$

性质

- $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$；$\int_a^b dx=b-a$
- $\int_a^b[k_1f(x)\pm k_2g(x)]dx=k_1\int_a^b f(x)dx\pm k_2\int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$
- 若 $x\in[a,b]$ 上有 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx$ $(a<b)$ 特殊地 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$ $(a<b)$
- 若 M 与 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值与最小时，则 $m(b-a)<\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)$
- 牛顿－莱布尼茨公式 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)dx=F(x)|_a^b=F(b)-F(a)$

计算

- 换元法与分部积分法：
- 函数的性质：若函数 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$；若函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$；若函数 $f(x)$ 周期为 T，则 $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$；$\int_T^{a+T}f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$

应用

- 几何应用：平面图形面积、弧长（数一、二）、旋转体侧面积（数一、二）、旋转体体积
- 经济应用（数三） 总成本、总利润
- 物理应用（数一、二）压力、做功、引力

反常积分

- 判断敛散性：
- 计算：

微分方程

一阶

- 可分离变量 $y'=f(x)g(y)$
- 齐次方程 $y'=\varphi(\dfrac{y}{x})$
- 一阶线性微分方程 $y'+p(x)y=Q(x)$ 通解：$y=e^{-\int p(x)dx}(\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c)$
- 伯努利方程（数一） $y'+P(x)y=Q(x)y^n(n\neq0,1)$ 通解：$y^{1-n}=e^{-\int(1-n)P(x)dx}(\int(4-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+c)$
- 全微方程（数一） $P(x_1y)dx+Q(x_1y)dy=0$ 为某一个函数 $u(x_1y)$ 全微分方程 $\Leftrightarrow\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 通解 $u(x_1y)=\int_{x_0}^x P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^y Q(x_1y)dy$

差分方程（数三）

- 一阶常系数线性齐次差分方程：$y_{t+1}+ayt=0$ 通解 $y_{c(t)}=c(-a)^t$
- 一阶常数线性非齐次差分方程：$y_{t+1}+ayt=f(t)$ 通解 $y_t=y_{c(t)}+y^*$. $f(t)=p_m(t)\begin{cases}a\neq-1,\text{令 }yt^*=Q_m(t)\\a=-1,\text{令 }yt^*=tQ_m(t)\end{cases}$；$f(t)=d^tp_m(t)\begin{cases}a+d\neq0,\text{令 }yt^*=d^tQ_m(t)\\a+d=0,\text{令 }yt^*=td^tQ_m(t)\end{cases}$

高阶

可降阶为（数一、二）：
- $y''=f(x,y')$：令 $y'=P$，则 $y''=P'$ 原方程变为 $P'=f(x,p)$ 一阶微分方程
- $y''=f(y,y')$：令 $y'=P$ 把 P 看作 y 的函数 则 $y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=P\dfrac{dp}{dy}$ 原方程变为 $\dfrac{dp}{dy}=\dfrac{1}{P}f(y,p)$ 一阶微分方程

高阶线性：
- 高阶常系数线性齐次：$y''+py'+qy=0$ 特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$
  - $\Delta=p^2-4q>0$ 两个不同实实 λ_1,λ_2 通解 $y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$
  - $\Delta=p^2-4q=0$ 两个相同实根 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$ 通解 $y=(c_1x+c_2)e^{\lambda_0x}$
  - $\Delta=p^2-4q<0$ 共轭复根 $-\dfrac{p}{2}\pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}i=\alpha\pm\beta i$ 通解 $y=e^{ax}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$
- 高阶常系数线性非齐次：$y''+py'+qy=f(x)$ 通解 $y=y^*+y_齐$ 其中 y^* 为 $y''+py'+qy=f(x)$ 的特解；$y_齐$ 为 $y''+py'+qy=0$ 的通解，y^* 的形式如下：
  - (1) $f(x)=P_n(x)e^{ax}$：a 不是特征根 令 $y^*=R_n(x)e^{ax}$；a 是特征单根 令 $y^*=xR_n(x)e^{ax}$；a 是特征重根 令 $y^*=x^2R_n(x)e^{ax}$
  - (2) $f(x)=P_n(x)e^{ax}\sin\beta x$ 或 $f(x)=P_n(x)e^{ax}\cos\beta x$：$\alpha\pm\beta i$ 不是特征根 令 $y^*=e^{ax}(R_n(x)\cos\beta x+T_n(x)\sin\beta x)$；$\alpha\pm\beta i$ 是特征根 令 $y^*=xe^{ax}(R_n(x)\cos\beta x+T_n(x)\sin\beta x)$
- 欧拉方程（数一）：$x^ny^{(n)}+P_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+P_ny=f(x)$ 解法：令 $x=e^t$ 即 $t=\ln x$，于是有 $x\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}$，$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right)$，$x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}=\left(\dfrac{d^3y}{dt^3}-3\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}\right)$，

无穷级数（数一、三）

常数项级数

- 定义：(1) $\sum\limits_{n=1}^\infty=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n a_k$ 极限存在收敛，不存在发散。(2) 绝对收敛，条件收敛.
- 性质：
  - $\sum\limits_{n=1}^\infty(aU_n\pm bV_n=a\sum\limits_{n=1}^\infty U_n\pm b\sum\limits_{n=1}^\infty V_n$，$\sum\limits_{n=1}^\infty kU_n=k\sum\limits_{n=1}^\infty U_n$.（其中 $\sum\limits_{n=1}^\infty U_n$，$\sum\limits_{n=1}^\infty V_n$ 收敛）
  - 若 $\sum\limits_{n=1}^\infty U_n$ 收敛，则任意加括号之后仍然收敛，反之不成立.
  - 若 $\sum\limits_{n=1}^\infty U_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=0$；反之，不成立.
- 判别法：
  - 正项级数：
    - 比较：不等式形式：$U_n\leqslant V_n$ 若 $\sum\limits_{n=1}^\infty V_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^\infty U_n$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^\infty U_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^\infty V_n$ 发散。极限形式 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{U_n}{V_n}=C\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^\infty U_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^\infty V_n$ 同敛散.
    - 比值或根值 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{U_{n+1}}{U_n}=\lambda$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lambda\Rightarrow$ $\lambda>1$ $\sum\limits_{n=1}^\infty U_n$ 发散；$\lambda<1$ $\sum\limits_{n=1}^\infty U_n$ 收敛；$\lambda=1$ 无法判断需另计论
  - 交错级数：莱布尼兹判别法：$\{U_n\}$ 单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^\infty(-1)^nU_n$ 收敛（其中 $U_n>0$）.

幂级数

- 性质：阿贝尔定理→收敛半径→收敛域；逐项求导；逐项积分；连续函数
- 收敛域的计算：① $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{U_n}{U_{n+1}}\right|=R$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|U_n|}}=R$ ② 点代入法.
- 求和与展开式：常见函数的泰勒级数；逐项与逐项积分.

傅里叶级数（数学一）

- 展开式：$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^l\left(a_n\cos\dfrac{n\alpha x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\alpha x}{l}\right)$ 其中 $a_n=\dfrac{1}{l}\int_{-l}^l f(x)\cos\dfrac{n\alpha x}{l}dx$；$b_n=\dfrac{1}{l}\int_{-l}^l f(x)\sin\dfrac{n\alpha x}{l}dx$.
- 收敛定理：$f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上的傅里叶级数为 $S(x)$。对任意点 $x_0\in[-l,l]$ 有 $S(x_0)=\begin{cases}f(x_0) & x_0\text{ 为 }(-l,l)\text{ 内的连续点}\\\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} & x_0\text{ 为 }(-l,l)\text{ 内的间断点}\\\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} & x_0=-l\text{ 或 }l\end{cases}$