2018年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试题详解

(1)【答案】(B).

【详解】$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$，∴ 左边 $=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(e^x+ax^2+bx)}$，$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}}=1$，

∴ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}=0$ ∴ 上式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\frac{1}{2}+a)x^2+(1+b)x+o(x^2)}{x^2}=0$，

∴ $\begin{cases}1+b=0\\ \dfrac{1}{2}+a=0\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\ b=-1\end{cases}$，选(B).

(2)【答案】(D).

【详解】对于(D)：由定义得 $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=-\dfrac{1}{2}$；

$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=\dfrac{1}{2}$，$f_+'(0)\neq f_-'(0)$，所以不可导.

(3)【答案】(D)

【详解】分段点为 $x=-1,x=0$，当 $x\leqslant -1$ 时，$f(x)+g(x)=-1+2+ax=1-ax$，当 $-1<x<0$ 时，$f(x)+g(x)=-1+x$，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)+g(x)=1+x-b$，综上知：

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}1-ax,x\leqslant -1,\\ -1+x,-1<x<0,\\ 1+x-b,x\geqslant 0.\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to -1^-}(f(x)+g(x))=1+a$，$\lim\limits_{x\to -1^+}(f(x)+g(x))=-2$，∴ $a=-3$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}(f(x)+g(x))=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x)+g(x))=1-b$，∴ $b=2$，选(D).

(4)【答案】(D)

【详解】对于选项(A)：取 $f(x)=-x+\dfrac{1}{2}$，$f'(x)<0$，但是 $f(\dfrac{1}{2})=0$，

对于选项(B):取 $f(x)=-(x-\frac{1}{2})^2+1$,$f''(x)<0$,但是 $f(\frac{1}{2})>0$,

对于选项(C):取 $f(x)=-x-\frac{1}{2}$,$f'(x)<0$,但是 $f(\frac{1}{2})=0$,

选(D).

(5)【答案】(C).

【详解】$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx=\pi$;

$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx=M$,所以 $N<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx=M$. ;

$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx=\pi$,所以 $K>M>N$.选(C).

(6)【答案】(C)

$$\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)dy$$

∵D 关于 y 轴对称

$$\therefore\ 原式=\iint_D(1-xy)dxdy=\iint_D dxdy=2\iint_{D_1}dxdy$$

$$=2\int_0^1dx\int_x^{2-x^2}dy=2\int_0^1(2-x^2-x)dx=2(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2})=\frac{7}{3}$$,选(C)

(7)【答案】(A).

【详解】∵$A\sim B$,∴$E-A\sim E-B$ ∴$r(E-A)=r(E-B)$

各选项中:B:$r(E-B)=1$;C:$r(E-B)=1$;D:$r(E-B)=1$ 选(A).

(8)【答案】(A)

【详解】设 $AB=C$,则矩阵 A 的列向量组可以表示 C 的列向量组,

所以 $(A\ AB)\to(A\ O)$,即 $r(A\ AB)=r(A\ O)=r(A)$,故答案选(A).

(9)【答案】1

【详解】由拉格朗日中值定理得:

$\arctan(x+1)-\arctan x=\frac{1}{1+\xi^2}$,$\xi\in(x,x+1)$.

且当 $x\to+\infty$ 时 $\xi\to+\infty$.

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{1}{1+\xi^2}=1$.

(10)【答案】$y=4x-3$

【详解】定义域 $(0,+\infty)$

$y'=2x+\frac{2}{x}, y''=2+\frac{-2}{x^2}$.令 $y''=2+\frac{-2}{x^2}=0\Rightarrow x=1>0$.

∴ 拐点为 $(1,1)$. 斜率 $k=y'(1)=4$.

∴ 切线方程为 $y=4x-3$.

(11)【答案】$\frac{\ln 2}{2}$

【详解】$\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}dx=\int_5^{+\infty}\frac{1}{(x-1)(x-3)}dx$

$=\frac{1}{2}\int_5^{+\infty}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\Big|_5^{+\infty}=\frac{\ln 2}{2}$

(12)【答案】$\frac{2}{3}$

【详解】$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=-\tan t$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{-\sec^2 t}{-3\cos^2 t\sin t}$.

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{3\sqrt{2}}$. ∴$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{3}$.

(13)【答案】$\frac{1}{4}$

【详解】$\ln z+e^{z-1}=xy$ $\quad x=2,y=\frac{1}{2}$ 时, $z=1$.

方程两边对 x 求偏导得:$\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\mathrm{e}^{z-1}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=y$.

将 $x=2,y=\frac{1}{2},z=1$ 代入得 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,\frac{1}{2})}=\frac{1}{4}$.

(14)【答案】2

【详解】由题可得 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$.

∵ $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆. ∴$A\sim B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$.

∴A,B 的特征值相等.

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 1\\ -1 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\left[(\lambda-1)^2+2\right]=0$$

$\therefore A$ 的实特征值为 2.

(15)【详解】$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,dx=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}\,de^{2x}$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot\frac{\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}}{1+(e^x-1)}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^x-1+1}{\sqrt{e^x-1}}de^x$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\left(\sqrt{e^x-1}+\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\right)d(e^x-1)$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{e^x-1}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C.$$

(16)【详解】(1) $\int_0^x tf(x-t)dt$

令 $u=x-t$ 则 $t=x-u$，$dt=-du$

$\therefore\int_0^x tf(x-t)dt=\int_x^0(x-u)f(u).(-du)$

$$=\int_0^x(x-u)f(u)du-\int_0^x uf(u)du$$

原方程可化为：

$$\int_0^x f(t)dt+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=ax^2$$

两边对 x 求导得

$$f(x)+\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=2ax$$

$\therefore f(x)+\int_0^x f(u)du=2ax$

$\therefore f(0)=0$

设 $F(x)=\int_0^x f(u)du$ 则 $F'(x)=f(x)$

$\therefore F'(x)+F(x)=2ax$

$\therefore F(x)=e^{-\int 1dx}[C+\int e^{-\int 1dx}2axdx]$

$$=e^{-x}[C+\int 2axe^{x}dx]$$

$$=e^{-x}[C+2a(x-1)e^{x}]$$

将 $F(0)=0$ 代入得：$C=2a$

$\therefore F(x)=2ae^{-x}+2a(x-1)$

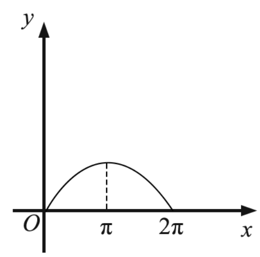
$f(x)=-2ae^{-x}+2a$

(2) $\dfrac{\int_0^1 f(x)dx}{1}=1$

$\int_0^1(-2ae^{-x}+2a)dx=2ae^{-x}\big|_0^1+2a=2a(e^{-1}-1)+2a=2ae^{-1}=1$

$\therefore a=\dfrac{e}{2}$

(17)【详解】原式 $=\int_0^{2\pi}dx\int_0^{y(x)}(x+2y)dy$



$=\int_0^{2\pi}(xy+y^2)\big|_0^{y(x)}dx$

$=\int_0^{2\pi}[xy(x)+y^2(x)]dx$

换元 $x=t-\sin t \quad y(x)=1-\cos t$

原式 $=\int_0^{2\pi}[(t-\sin t)(1-\cos t)+(1-\cos t)^2]d(t-\sin t)$

$=\int_0^{2\pi}[(t-\sin t)(1-\cos t)^2+(1-\cos t)^3]dt$

$=\int_0^{2\pi}[t(1-\cot)^2-\sin t(1-\cos t)^2+(1-\cos t)^3]dt$

$=\int_0^{2\pi}(t-2t\cos t+t\cos^2 t)dt-\dfrac{1}{3}(1-\cos t)^3\big|_0^{2\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt$

$=\dfrac{1}{2}t^2\big|_0^{2\pi}-2(t\sin t+\cos t)\big|_0^{2\pi}+\dfrac{t^2}{4}\big|_0^{2\pi}+\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{2}+\sin 2t+\dfrac{1}{4}\cos 2t]\big|_0^{2\pi}-0+2\pi-$

$3\sin t\big|_{-\pi}^{\pi}+3(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sin 2t}{4})\big|_{-\pi}^{\pi}-(\sin t-\dfrac{1}{3}\sin^3 t)\big|_{-\pi}^{\pi}$

$=2\pi^2+\pi^2+2\pi+3\pi$

$=3\pi^2+5\pi$

(18)【详解】讨论：(Ⅰ) $x=1$ 时，不等式成立

(Ⅱ) $0<x<1$ 时只需证 $x-\ln^2 x+2k\ln x-1\leqslant 0$

设 $f(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1$

$$f'(x)=\frac{x-2\ln x+2k}{x}$$

设 $g(x)=x-2\ln x+2k, x\in(0,1)$

$g'(x)=1-\dfrac{2}{x}<0$，故 $g(x)$ 单调递减，则

$g(x)>g(1)=1+2k\geqslant 1+2(\ln 2-1)=2\ln 2-1>0$

则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，故 $f(x)\leqslant f(1)=0$，结论成立.

(Ⅲ) $x>1$ 只需证 $x-\ln^2 x+2k\ln x-1\geqslant 0$

设 $f(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1$

$$f'(x)=\frac{x-2\ln x+2k}{x},\ (x>1)$$

设 $g(x)=x-2\ln x+2k$，$(x>1)$

$$g'(x)=1-\frac{2}{x},\ \begin{cases}1<x<2, g'(x)<0, g(x)\text{递减}\\ x>2, g'(x)>0, g(x)\text{递增}\end{cases}$$

故 $g(x)\geqslant g(2)=2+2k-2\ln 2\geqslant 2+2(\ln 2-1)-2\ln 2=0$

故 $f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 单调增加，$f(x)\geqslant f(1)=0$，结论成立.

综上，不等式成立.

(19)【详解】设 $x+y+z=2$

$$2\pi r=x, r=\frac{x}{2\pi}, S_1=\pi r^2=\frac{x^2}{4\pi}$$

$$4a=y, a=\frac{y}{4}, S_2=a^2=\frac{y^2}{16}$$

$$3b=z, b=\frac{z}{3}, S_3=\frac{1}{2}\,\frac{z}{3}\,\frac{z}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}z^2}{36}$$

令 $L(x,y,z,\lambda)=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{\sqrt{3}z^2}{36}+\lambda(x+y+z-2)$

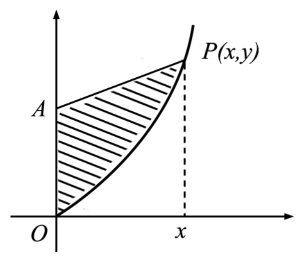
$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=\dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=\dfrac{2y}{16}+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=\dfrac{2z}{12\sqrt{3}}+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y+z-2=0\end{cases}，即\begin{cases}x=-2\pi\lambda\\ y=-8\lambda\\ z=-6\sqrt{3}\lambda\end{cases}，\begin{cases}y=\dfrac{4x}{\pi}\\ z=\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}x\end{cases}，$$

则 $x(1+\dfrac{4}{\pi}+\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi})=2$，故 $\begin{cases}x=\dfrac{2}{(1+\dfrac{4}{\pi}+\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi})}\\ y=\dfrac{4}{\pi}\dfrac{2}{(1+\dfrac{4}{\pi}+\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi})}\\ z=\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}\dfrac{2}{(1+\dfrac{4}{\pi}+\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi})}\end{cases}$

那么此时的 (x,y,z,λ) 就是使 S 最小的点

S 最小值为 $S=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{\sqrt{3}z^2}{36}=\dfrac{1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$

(20)【详解】由题意 $\dfrac{dx}{dt}=4$



$S=\dfrac{1}{2}(1+y)x-\displaystyle\int_0^x y(u)du$

$=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{4}{9}x^2)x-\displaystyle\int_0^x \dfrac{4}{9}u^2du$

$=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{9}x^3-\dfrac{4}{27}x^3$

$=\dfrac{2}{27}x^3+\dfrac{x}{2}$

因此由 $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{ds}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=(\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{1}{2})\dfrac{dx}{dt}$

可得 $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=3}=(\dfrac{2}{9}\cdot 3^2+\dfrac{1}{2})\cdot 4=10$

(21)【详解】设 $f(x)=e^x-1-x, x>0$，则有

$f'(x)=e^x-1>0$，因此 $f(x)>0$，$\dfrac{e^x-1}{x}>1$，

从而 $e^{x_2}=\dfrac{e^{x_1}-1}{x_1}>1, x_2>0$；

猜想 $x_n>0$，现用数学归纳法证明：

$n=1$ 时，$x_1>0$，成立；

假设 $n=k(k=1,2,\cdots)$ 时，有 $x_k>0$，则 $n=k+1$ 时有

$e^{x_{k+1}}=\dfrac{e^{x_k}-1}{x_k}>1$，所以 $x_{k+1}>0$；

因此 $x_n>0$，有下界.

又 $x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}-\ln e^{x_n}=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}$；

设 $g(x)=e^x-1-xe^x$，

$x>0$ 时，$g'(x)=e^x-e^x-xe^x=-xe^x<0$，

所以 $g(x)$ 单调递减，$g(x)<g(0)=0$，即有 $e^x-1<xe^x$，

因此 $x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}<\ln 1=0$，$x_n$ 单调递减.

由单调有界准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则有 $Ae^A=e^A-1$；

因为 $g(x)=e^x-1-xe^x$ 只有唯一的零点 $x=0$，所以 $A=0$.

(22)【详解】(Ⅰ)由 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 得

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ x_2+x_3=0,\\ x_1+ax_3=0,\end{cases}$$

系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\1&0&a\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}$，

$a\neq 2$ 时，$r(A)=3$，方程组有唯一解：$x_1=x_2=x_3=0$；

$a=2$ 时，$r(A)=2$，方程组有无穷解：$x=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$，$k\in R$.

(Ⅱ)$a\neq 2$ 时，令 $\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3,\\ y_2=x_2+x_3,\\ y_3=x_1+ax_3,\end{cases}$ 这是一个可逆变换，

因此其规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$；

$a=2$ 时, $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2$

$$=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_2x_3+6x_1x_3$$

$$=2\left(x_1-\frac{x_2-3x_3}{2}\right)^2+\frac{3(x_2+x_3)^2}{2},$$

此时规范形为 $y_1^2+y_2^2$.

(23)【详解】(Ⅰ) A 与 B 等价,则 $r(A)=r(B)$.

又 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{vmatrix}\overset{r_3-r_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\3&9&0\end{vmatrix}=0$,

所以 $|B|=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{vmatrix}=2-a=0$,

$a=2$.

(Ⅱ) $AP=B$,即解矩阵方程 $AX=B$:

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得 $P=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$;

又 P 可逆,所以 $|P|\neq0$,即 $k_2\neq k_3$.

最终 $P=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数,且 $k_2\neq k_3$.

2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试题详解

(1)【答案】(A)

【详解】由

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{(\sqrt{x})^2}{2}}{ax}=\frac{1}{2a}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} b=b$$

函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则有 $\frac{1}{2a}=b$,即 $ab=\frac{1}{2}$

(2)【答案】(B)

【详解】特殊值法.由题意可知，$f(x)$ 为凹函数,又由 $f(1)=f(-1)=1$,$f(0)=-1$

令 $f(x)=x^2-1$,可得

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx=\int_{-1}^{1}x^2dx-\int_{-1}^{1}1dx=\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}<0$$

(B)正确.(A)、(C)、(D)错误.

(3)【答案】(D)

【详解】数列 $\{x_n\}$ 收敛,不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

选项(A)： 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=\sin a$,

所以，$\sin a=0$.解得，

$$a=k\pi\ ,\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\ .$$

选项(A)错误.

选项(B)：因为

$$\lim_{n\to\infty}x_n(x_n+\sqrt{|x_n|})=\lim_{n\to\infty}x_n\lim_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=a\cdot\left(a+\sqrt{|a|}\right)$$

所以，$a\cdot\left(a+\sqrt{|a|}\right)=0$.解,得 $a\leqslant 0$.选项(B)错误

选项(C)：因为

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=a+a^2\ ,$$

所以,有 $a+a^2=0$,解得,$a=0$ 或 -1.选项(C)错误

选项(D):因为

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=a+\sin a\ ,$$

所以,有 $a+\sin a=0$,解得,$a=0$.选项(D)正确

(4)【答案】(C)

【详解】$y''-4y'+8y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+8=0$,解得特征根为 $2\pm 2i$

则 $y''-4y'+8y=e^{2x}$ 的特解可设为

$$y_1^*=Ae^{2x}\ ;$$

$y''-4y'+8y=e^{2x}\cos x$ 的特解可设为

$$y_2^*=xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$$

所以,$y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为

$$y^*=Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$$

正确答案为(C)

(5)【答案】(D)

【详解】由 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$ 得 $f(x,y)$ 关于 x 为增函数,则有

$$f(0,0)<f(1,0),f(0,1)<f(1,1)$$

由 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$ 得到 $f(x,y)$ 关于 y 为减函数,则有

$$f(1,0)>f(1,1),f(0,0)>f(0,1)$$

因此,我们只能得出

$$f(1,0)>f(0,0)>f(0,1)$$

正确答案为(D)

(6)【答案】(C)

【详解】从 0 到 t_0 这段时间内甲乙的位移分别为 $\int_0^{t_0}v_1(t)dt,\int_0^{t_0}v_2(t)dt$,则乙要追上甲,即乙比甲多跑 $10m$,因此 $\int_0^{t_0}v_2(t)dt-\int_0^{t_0}v_1(t)dt=10$.由定积分的几何意义及图可知 $t_0=25$.

(7)【答案】(B)

【详解】对 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 两边同时左乘以 P ,得

$$AP=P\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

把 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 代入上式，则

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

即

$$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(0,\alpha_2,2\alpha_3)$$

因此，

$$A\alpha_1=0,A\alpha_2=\alpha_2,A\alpha_3=2\alpha_3$$

所以，

$$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=A\alpha_1+A\alpha_2+A\alpha_3=0+\alpha_2+2\alpha_3=\alpha_2+2\alpha_3$$

正确答案(B)

(8)【答案】(B)

【详解】令 $|\lambda E-A|=0$，解得 $\lambda=2,2,1$.即 A 的特征值为 2,2,1.又 $3-r(2E-A)=1$.因此，A 可相似对角化.

令 $|\lambda E-B|=0$，解得 B 的特征值为 2,2,1.又 $3-r(2E-B)=2$.因此，B 不可相似对角化. C 为对角形矩阵.所以，A 与 C 相似，B 与 C 不相似.正确答案选(B)

(9)【答案】$y=x+2$

【详解】$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}x\arcsin\frac{2}{x}=\lim_{t=\frac{1}{x}\to 0}\frac{\arcsin 2t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{t}=2$$

因此，斜渐近线方程为 $y=x+2$

(10)【答案】$-\dfrac{1}{8}$

【详解】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\cos t}{1+e^t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{\cos t}{1+e^t}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{-\sin t\cdot(1+e^t)-\cos t\cdot e^t}{(1+e^t)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{-e^t(\sin t+\cos t)-\sin t}{(1+e^t)^2}\cdot\frac{1}{1+e^t}=\frac{-e^t(\sin t+\cos t)-\sin t}{(1+e^t)^3}$$

因此，$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=\frac{-1}{2^3}=-\frac{1}{8}$

(11)【答案】1

【详解】$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx=-\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A\ln(1+x)d\frac{1}{1+x}$

$=-\lim\limits_{A\to+\infty}\left[\frac{\ln(1+x)}{1+x}\Big|_0^A-\int_0^A\frac{1}{1+x}d\ln(1+x)\right]$

$=-\lim\limits_{A\to+\infty}\left[\frac{\ln(1+A)}{1+A}-\int_0^A\frac{1}{(1+x)^2}dx\right]$

$=-\lim\limits_{A\to+\infty}\left[\frac{\ln(1+A)}{1+A}+\frac{1}{1+x}\Big|_0^A\right]=-\lim\limits_{A\to+\infty}\left[\frac{\ln(1+A)+1}{1+A}-1\right]=1$

(12)【答案】xye^y

【详解】因为

$$ye^ydx+x(1+y)e^ydy=d(xye^y+c)$$

所以，

$$f(x,y)=xye^y+c$$

把 $f(0,0)=0$ 代入 $f(x,y)=xye^y+c$，解得，$c=0$

因此，$f(x,y)=xye^y$.

(13)【答案】$-\ln\cos1$

【详解】交换积分次序

$\int_0^1dy\int_y^1\frac{\tan x}{x}dx=\int_0^1dx\int_0^x\frac{\tan x}{x}dy=\int_0^1\tan x dx$

$$=\ln|\sec x|\,\Big|_0^1=\ln\sec1=-\ln\cos1$$

(14)【答案】-1

【详解】设特征向量 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 对应的特征值为 λ，则

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\2\lambda\end{pmatrix}$$

又因为，

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3+2a\\2\end{pmatrix}$$

所以，

$$\begin{pmatrix}1\\3+2a\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\2\lambda\end{pmatrix}$$

因此，

$$\begin{cases}1=\lambda\\3+2a=\lambda\\2=2\lambda\end{cases}$$

解得，$\begin{cases}\lambda=1\\a=-1\end{cases}$.

(15)【详解】$\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t dt\overset{x-t=u}{=}\int_x^0\sqrt{u}\,e^{x-u}d(x-u)$

$=\int_0^x\sqrt{u}\,e^{x-u}du=e^x\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}du$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t dt}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}du}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}e^x\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}du}{\sqrt{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\,e^{-x}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\,e^{-x}}{\sqrt{x}}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0^+}e^{-x}=\frac{2}{3}$$

(16)【详解】令 $u=e^x$，$v=\cos x$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot e^x-\frac{\partial f}{\partial v}\sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot e^x-\frac{\partial f}{\partial v}\sin x\right)}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{du}{dx}e^x+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}e^x+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot e^x-\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{du}{dx}\sin x-\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{dv}{dx}\sin x-\frac{\partial f}{\partial v}\cos x$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot e^{2x}-\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot e^x\sin x+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot e^x-\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot e^x\sin x+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\sin^2 x-\frac{\partial f}{\partial v}\cos x$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot e^{2x}-2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot e^x\sin x+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\sin^2 x+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot e^x-\frac{\partial f}{\partial v}\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot e^x-\frac{\partial f}{\partial v}\sin x\right)\Big|_{x=0}=f'_u(1,1)e^0-f'_v(1,1)\sin 0=f'_u(1,1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot e^{2x}-2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot e^x\sin x+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\sin^2 x+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot e^x-\frac{\partial f}{\partial v}\cos x\right)\Big|_{x=0}$$

$=f''_{uu}(1,1)\cdot e^0-2f''_{uv}(1,1)\cdot e^0\cdot\sin 0+f''_{vv}(1,1)\sin^2 0+f'_u(1,1)e^0-f'_v(1,1)\cos 0$

$=f''_{uu}(1,1)+f'_u(1,1)-f'_v(1,1)$

(17)【详解】$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}ln(1+\frac{k}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}ln(1+\frac{k}{n})\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)dx^2$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 d\ln(1+x)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2-1)+1}{1+x}dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)dx-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)-\frac{1}{2}\ln 2$$

(18)【详解】方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 两边同时对 x 求导,得

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-3+3\frac{dy}{dx}=0 \qquad ①$$

解,得 $\frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2}{1+y^2}$

令 $\frac{dy}{dx}=0$,解得 $x=\pm 1$,分别代入方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$,得

$$\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-1\\ y=0\end{cases}$$

因此,驻点为 $(1,1)$,$(-1,0)$.

对①两边再同时对 x 求导,得

$$6x+6y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+3y^2\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{d^2y}{dx^2}=0 \qquad ②$$

把点 $(1,1)$ 及 $\frac{dy}{dx}=0$ 代入②,得 $\frac{d^2y}{dx^2}=-1<0$

因此,$(1,1)$ 为函数 $y(x)$ 的极大值点

把点 $(-1,0)$ 及 $\frac{dy}{dx}=0$ 代入②,得 $\frac{d^2y}{dx^2}=2>0$

因此,$(-1,0)$ 为函数 $y(x)$ 的极小值点.

综上所述,$y(x)$ 在 $x=1$ 处有极大值 1,在 $x=-1$ 处有极小值 0.

(19)【详解】(Ⅰ)因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$,由极限的保号性可知,存在 $c\in U^+(0)$ 使得,$\frac{f(c)}{c}<0$,即 $f(c)<0$.又 $f(1)>0$,由零点定理可得,存在 $\xi\in(c,1)$,使得 $f(\xi)=0$.

因此,方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 至少存在一个根.

(Ⅱ)令 $F(x)=f(x)f'(x)$ 则

$$F'(x)=f(x)f''(x)-[f'(x)]^2$$

一方面,由 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$,可得 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$.

另一方面,设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

因此,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0=f(0)$ 即,$f(0)=0$.有 $F(0)=f(0)f'(0)=0$

而由(Ⅰ)知,$f(\xi)=0$,有 $F(\xi)=f(\xi)f'(\xi)=0$

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{}=\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)<0$

及 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数,得 $f'(0)<0$

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上由拉格朗日中值定理得存在 $\eta\in(0,1)$,使得

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(\eta)$$

由 $f(1)>0$,$f(0)=0$ 可得 $f'(\eta)>0$

由零点定理得存在,$\xi_1\in(0,\eta)$ 使得 $f'(\xi_1)=0$

即

$$F(\xi_1)=f(\xi_1)f'(\xi_1)=0$$

综上所述 $F(0)=F(\xi)=F(\xi_1)=0$

由罗尔定理可得存在 $\eta_1\in(0,\xi)$,$\eta_2\in(\xi,\xi_1)$,使得,

$$F'(\eta_1)=0,F'(\eta_2)=0$$

因此,$F'(x)$ 在 $[0,1]$ 上至少有两个零点,即方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同的实根.

(20)【详解】区域 D 关于 y 轴对称,所以,

$$\iint_D (x+1)^2 dxdy = \iint_D (x^2+2x+1)dxdy = \iint_D x^2 dxdy + 2\iint_D x dxdy + \iint_D dxdy$$

$$= 2\iint_{\substack{D\\x>0}} x^2 dxdy + 0 + S_D = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2 \cos^2\theta \cdot r dr + \pi$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \cdot \sin^4\theta d\theta + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

(21)【详解】L 在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为：

$$Y - y(x) = y'(x)(X - x)$$

令 $X=0$，得

$$Y_P = y(x) - y'(x)x$$

L 在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为：

$$Y - y(x) = -\frac{1}{y'(x)}(X - x)$$

令 $Y=0$，得

$$X_P = x + y(x)y'(x)$$

由已知 $X_p = Y_P$ 得，

$$y(x) - y'(x)x = x + y(x)y'(x)$$

整理，得

$$y'(x) = \frac{y-x}{y+x}$$

解微分方程可得

$$\ln(x^2+y^2) + 2\arctan\frac{y}{x} = C$$

又由已知 $y(1)=0$ 代入，得　$C=0$

因此，L 上的点 (x,y) 满足的方程为

$$\ln(x^2+y^2) + 2\arctan\frac{y}{x} = 0$$

(22)【详解】(Ⅰ)因为 A 有 3 个不同的特征值，所以，0 至多是矩阵 A 的单根，因此，$r(A)\geqslant 2$

又因为 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；所以，$r(A)\leqslant 2$.综上所述，$r(A)=2$

(Ⅱ)由(Ⅰ) $r(A)=2$ 可得 $AX=0$ 的基础解系有一个向量.而由 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，即 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$，得

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = 0$$

所以，$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 为 $AX=0$ 的基础解系.因为，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta,$$

即 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta$，所以，$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为 $Ax=\beta$ 的特解.

因此，方程 $Ax=\beta$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(23)【详解】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵为 A，则 $A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$

由 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换下的标准形为 $\lambda_1y_1{}^2+\lambda_2y_2{}^2$，可知，矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,0$.即 $r(A)=2$.所以 $|A|=0$.解 $|A|=\begin{vmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{vmatrix}=0$，得 $a=2$

令 $|\lambda E-A|=0$，解得 $\lambda=-3,6,0$

$(-3E-A)X=0$ 的基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，其单位向量为 $\beta_1=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

$(6E-A)X=0$ 的基础解系为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，其单位向量为 $\beta_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$(0E-A)X=0$ 的基础解系为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，其单位向量为 $\beta_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

令 $\lambda_1=-3,\lambda_2=6$.则

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac13\\ \frac{-1}{\sqrt3}&0&\frac23\\ \frac{1}{\sqrt3}&\frac{-1}{\sqrt2}&\frac13\end{pmatrix}$$

2016 年全国硕士研究生入学统一考试
数学(二)试题详解

(1)【答案】(B)

【详解】当 $x\to 0^+$ 时，

$\alpha_1=x\left(\cos\sqrt{x}-1\right)\sim-\dfrac{1}{2}x^2,\alpha_2=\sqrt{x}\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sim x^{\frac{5}{6}},\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1\sim\dfrac{1}{3}x$

所以 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的顺序是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，故选(B)

(2)【答案】(D)

【详解 1】排除法：

由原函数可导知，原函数一定连续，所以原函数在 $x=1$ 处连续，排除(A)和(C)由已知条件，可知原函数满足 $F'(1)=f(1)=0$.

(B)选项中：

$$F'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x(\ln x+1)-1-0}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x+2}{1}=2$$

所以(B)错误，选(D)

【详解 2】直接法：

对选项(D)中的函数求导，

$$F'(x)=\begin{cases}2(x-1),x<1\\ \ln x,x>1\end{cases},$$

又由 $F'_+(1)=F'_-(1)=0$，得 $F'(1)=0$

所以，$f(x)=F'(x)$　因此(D)选项是正确答案.

(3)【答案】(B)

【详解】$\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{1}{x}}d\,\frac{1}{x}=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{-\infty}^{0}=1$；收敛

同理，$\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{0}^{+\infty}e^{\frac{1}{x}}d\,\frac{1}{x}=+\infty$；发散.

(4)【答案】(B)

【详解】根据极值的必要条件可知，极值点可能是驻点或者导数不存在的点，根据极值

得充分条件可知,在某点左右导数符号发生改变,则该点是极值点,因此从图形可知函数 $f(x)$ 有 2 个极值点

根据拐点的必要条件可知,拐点可能是二阶导数为零的点或二阶导数不存在的点,根据拐点的充分条件可知,曲线在某点左右导函数的单调性发生改变,则该点是曲线的拐点,因此曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点,故选(B)

(5)【答案】(A)

【详解】因为 $f''_i(x)$ 连续且 $f''_i(x_0)<0$,所以根据连续的定义和极限的保号性在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有 $f''_i(x)<0$.所以 $f_i(x)$ 在 $U(x_0)$ 内是凸的,又因为在 $x=x_0$ 处具有公切线 $y=g(x)$,根据凸函数的几何意义可知曲线与切线位置关系为 $f_i(x)\leqslant g(x)$.在 x_0 处 $y=f_1(x)$ 曲率大于 $y=f_2(x)$,所以 $f''_1(x_0)<f''_2(x_0)<0$.令 $F(x)=f_1(x)-f_2(x)$,因为在 $x=x_0$ 处具有公共切线 $y=g(x)$,所以 $F(x_0)=0$,$F'(x_0)=0$.再由 $F''(x_0)<0$ 得,$F(x_0)=0$ 为 $F(x)$ 的极大值.所以在 x_0 的某邻域 $U_1(x_0)$ 内 $F(x)\leqslant 0$,故 $f_1(x)\leqslant f_2(x)$,从而 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant g(x)$,故选(A)

(6)【答案】(D)

【详解】因为

$$f'_x(x,y)=\frac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2},f'_y(x,y)=\frac{e^x}{(x-y)^2},$$

所以

$$f'_x(x,y)+f'_y(x,y)=\frac{e^x}{x-y},$$

故选(D)

(7)【答案】(C)

【详解】A 与 B 相似,即存在可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP=B$,则

$$B^T=(P^{-1}AP)^T=P^TA^T(P^{-1})^T=((P^T)^{-1})^{-1}A^T(P^T)^{-1},$$

即(A)是正确的

$$B^{-1}=(P^{-1}AP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$$

进一步有

$$B+B^{-1}=P^{-1}AP+P^{-1}A^{-1}P=P^{-1}(A+A^{-1})P$$

即(B)(D)都是正确的;故选(C)

(8)【答案】(C)

【详解】二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-a \end{vmatrix}=(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)^2=0$$

得，A 的特征值为 $a+2,a-1$，由于 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正、负惯性指数为 1，2，且正、负惯性指数恰好等于特征值中正、负数的个数，所以 $a+2>0,a-1<0$，即 $-2<a<1$.故选(C)

(9)【答案】$y=x+\dfrac{\pi}{2}$

【详解】因为

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)\right)=1\ ,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)-x\right)=\frac{\pi}{2}$$

所以，斜渐近线为 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$

(10)【答案】$\sin1-\cos1$

【详解】因为

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots n\sin\frac{n}{n}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\frac{k}{n}\end{aligned}$$

所以，由定积分定义得，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots n\sin\frac{n}{n}\right)=\int_0^1 x\sin x\,dx=(-x\cos x+\sin x)\Big|_0^1=\sin1-\cos1$$

(11)【答案】$y'-y=2x-x^2$

【详解】设一阶非齐次线性方程微分方程为 $y'+p(x)y=q(x)$，根据线性微分方程齐次与非齐次解之间的关系知 $x^2-(x^2-e^x)=e^x$ 为 $y'+p(x)y=0$ 的解.所以 $p(x)=-1$，又因为 $y=x^2$ 为 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解，所以 $q(x)=2x-x^2$，故一阶非齐次线性微分方程为 $y'-y=2x-x^2$

(12)【答案】$\frac{5}{2}\times 2^n$

【详解】当 $x=0$ 时，$f(0)=1$；

$f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)dt$ 两边同时对 x 求导，得

$$f'(x)=2(x+1)+2f(x),$$

$$f'(0)=4;$$

$f'(x)=2(x+1)+2f(x)$ 两边同时对 x 求导，得

$$f''(x)=2+2f'(x),$$

$$f''(0)=10;$$

$f''(x)=2+2f'(x)$ 两边同时对 x 求导，得

$$f'''(x)=2f''(x);$$

依次求导得

$$f^{(n)}(x)=2^{n-1}f''(x);$$

所以，$f^{(n)}(0)=2^{n-1}f''(0)=\frac{5}{2}\times 2^n$

(13)【答案】$2\sqrt{2}v_0$

【详解】$l=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^6}$，同时对 t 求导得，

$$\frac{dl}{dt}=\frac{dl}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{2x+6x^5}{2\sqrt{x^2+x^6}}\frac{dx}{dt}$$

又因为 $x=1$，$\frac{dx}{dt}=v_0$，所以 $\frac{dl}{dt}\Big|_{x=1}=\frac{8}{2\sqrt{2}}v_0=2\sqrt{2}v_0$

(14)【答案】2

【详解】设 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

由

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $r(B)=2$，

因为 A 与 B 等价，所以 $r(A)=r(B)=2$，于是

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix}=(a-2)(a+1)^2$$

即 $a=2$ 或 $a=-1$

而 $a=-1$ 时，$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 此时 $r(A)=1$，不合题意；故 $a=2$.

(15)【详解 1】

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4+2x\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)+o(x^4)}{x^4}}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}}=e^{\frac{1}{3}}$$

【详解 2】

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-4\cos 2x+2\cos x+2\cos x-2x\sin x}{12x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-4\cos 2x+4\cos x-2x\sin x}{12x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{8\sin 2x-4\sin x-2\sin x-2x\cos x}{24x}}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{8\sin 2x-6\sin x-2x\cos x}{24x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{16\cos 2x-6\cos x-2\cos x+2x\sin x}{24}}=e^{\frac{1}{3}}$$

(16)【详解】$f(x)=\int_0^x(x^2-t^2)\,dt+\int_x^1(t^2-x^2)\,dt=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$

$f'(x)=4x^2-2x$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，且

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，

从而 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取极小值且为最小值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

(17)【详解】由 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$，两边分别同时对 x,y 求偏导数得

$$\begin{cases} 2xz+(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+2=0(1) \\ 2yz+(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+2=0(2) \end{cases}$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0(3)$ 得

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-1(4) \\ z=1 \end{cases}$$

又对(1)分别关于x求偏导数,关于y求偏导数,(2)关于y求偏导数;再把(3)、(4)代入即得:

$$2z+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

$$(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

$$2z+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

解得,

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{3},B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2}{3}$$

又$AC-B^2>0,A<0$,故$z=z(x,y)$在$(-1,-1)$取得极大值,极大值为$z=z(-1,-1)=1$

(18)【详解】$D=\left\{(r,\theta)\ \middle|\ \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4},0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sin\theta}\right\}$

则$\iint\limits_D\frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\frac{r^2\cos^2\theta-r^2\cos\theta\sin\theta-r^2\sin^2\theta}{r^2}rdr$

$$=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta)d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}rdr$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\csc^2\theta-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-2\right)d\theta$$

$$=1-\frac{\pi}{2}$$

(19)【详解】把$y_2(x)=\mu(x)e^x$代入原方程得,

$(2x-1)e^x[\mu''(x)+2\mu(x)+\mu(x)]-(2x+1)e^x(\mu'(x)+\mu(x))+2\mu(x)e^x=0$

即

$$(2x-1)\mu''(x)+(2x-3)\mu'(x)=0$$

整理得,

$$\frac{d\mu'(x)}{dx}=\mu''(x)=-\frac{2x-3}{2x-1}\mu'(x)$$

变量分离得,

$$\frac{d\mu'(x)}{\mu'(x)}=-\frac{2x-3}{2x-1}dx$$

两边积分

$$\int \frac{d\mu'(x)}{\mu'(x)}=-\int \frac{2x-3}{2x-1}dx$$

即

$$\ln|\mu'(x)|=-\int\left(1-\frac{2}{2x-1}\right)dx=-x+\ln|2x-1|+\ln C_1$$

所以 $\mu'(x)=C_1(2x-1)e^{-x}$,两边积分

$$\int\mu'(x)dx=C_1\int(2x-1)e^{-x}dx$$

得,

$$\mu(x)=C_1(-2x-1)e^{-x}+C_2$$

由已知 $\mu(-1)=C_1e+C_2=e$,$\mu(0)=-C_1+C_2=-1$,解得 $C_1=1,C_2=0$

所以,$\mu(x)=-(2x+1)e^{-x}$

根据二阶齐次线性方程解得结构得,原方程通解为

$y(x)=D_1y_1+D_2y_2=D_1e^{x}+D_2\mu(x)e^{x}$

其中,D_1,D_2 为任意常数.

(20)【详解】由于,则可以化成直角坐标系下的方程,可得

$$(x^{\frac{1}{3}})^2+(y^{\frac{1}{3}})^2=1\ ,$$

从而有 $y^2=(1-x^{\frac{2}{3}})^3$

所以,有

$$V=\int_0^1\pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2dx-\int_0^1\pi\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx=\frac{2\pi}{3}-\frac{16\pi}{105}=\frac{18\pi}{35}$$

表面积

$$S=2\pi\times1^2+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\sqrt{(3\cos^2t\ (-\sin t))^2)+(3\sin^2t\cos t)^2}dt$$

$$=2\pi+6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos tdt=\frac{16\pi}{5}$$

(21)【详解】(Ⅰ)由已知

$$f(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt\ ,f(0)=0$$

则

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}f(x)d\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)f(x)\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}}-\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)f'(x)dx$$

$$=-\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\frac{\cos x}{2x-3\pi}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\cos xdx=\frac{1}{2}$$

所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值为

$$\frac{1}{\frac{3\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=\frac{1}{\frac{3\pi}{2}-0}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3\pi}$$

(Ⅱ)由 $f(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt$ 得，

$$f'(x)=\frac{\cos x}{2x-3\pi},$$

令 $f'(x)=0$；解得在 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 上唯一驻点为 $x=\frac{\pi}{2}$ ，

且当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时 $f'(x)<0$；当 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ 时，$f'(x)>0$；

所以 $x=\frac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内的极值点，也是最小值点

故 $f_{\min}(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt<0, f(0)=0.$

$f(\pi)=\int_0^{\pi}\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt=\int_0^{\pi}\frac{d\sin t}{2t-3\pi}dt=\frac{\sin t}{2t-3\pi}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin td\frac{1}{2t-3\pi}=2\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{(2t-3\pi)^2}dt>0$ 函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内无零点；函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 内唯一零点.综上所述，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内唯一零点.

(22)【详解】(Ⅰ) $(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1-a&0\\1&0&a&1\\a+1&1&a+1&2a-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1-a&1\\0&1&1-2a&-1\\0&0&2a-a^2&a-2\end{array}\right)$

当 $a=0$ 时，$r(A)=2$，$r(A,\beta)=3$，$Ax=\beta$ 无解

(Ⅱ) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ $\qquad A^TA=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$

$$A^T\beta=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$(A^TA,A^T\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以，$A^TA=0$ 的基础解析系为 $\xi=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$A^TA=\beta$ 的特解为 $\eta=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$，因此，$A^TA=\beta$ 的通解为 $x=k\xi+\eta$，其中 k 为任意常数.

(23)【详解】(Ⅰ) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\-2 & \lambda+3 & 0\\0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$

所以，A 的特征值为 $-1,-2,0$

其对应的特征向量分别为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\1 & 2 & 2\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，　　$\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

有 $P^{-1}AP=\Lambda$，易知

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\-1 & 1 & \frac{1}{2}\\0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

所以，$A=P\Lambda P^{-1}$

$$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\1 & 2 & 2\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^{99} & 0 & 0\\0 & (-2)^{99} & 0\\0 & 0 & 0^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\-1 & 1 & \frac{1}{2}\\0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\-2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(Ⅱ)

$$B^2=BA$$

$$B^3=B(B^2A)=B(BA)=B^2A=BAA=BA^2$$

$$B^4=B^2A^2=BAA^2=BA^2=BAA^2=BA^3$$

依次类推得,

$$B^{100}=BA^{99}$$

所以,有

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{99}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

从而有

$$\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2$$

$$\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2$$

$$\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2$$

2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试题详解

(1)【答案】(D)

【详解】选项(A)根据 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}q>1 & 收敛\\ p\leqslant 1 & 发散\end{cases}$，所以 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ 发散.

选项(B) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\int_2^{+\infty}\ln x d\ln x=\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to+\infty}\ln^2 t-\frac{1}{2}\ln^2 2=+\infty$.发散

选项(C) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln(\ln x)\mid_2^{+\infty}=\infty$.发散

选项(D)

$$\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A xe^{-x}dx=\lim_{A\to+\infty}\left(-\int_2^A xde^{-x}\right)$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(-xe^{-x}\mid_2^A+\int_2^A e^{-x}dx\right)=\lim_{A\to+\infty}(-Ae^{-A}+2e^2-e^{-A})$$

$$=2e^2.收敛.$$

(2)【答案】(B)

【详解】$x\neq 0$，

$$f(x)=\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x2}{t}}=e^x，则，$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}e^x=1$$

所以 $x=0$ 为可去间断点.

(3)【答案】(A)

【详解】因为，

$$f(x)=\begin{cases}x^\alpha\cos\frac{1}{x^\beta},x>0\\ 0,x\leqslant 0\end{cases}(\alpha>0,\beta>0)$$

当 $x>0$ 时

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta},$$

当 $x<0$ 时,

$$f'(x)=0$$

若要 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$,则

$$\begin{cases}\alpha-1>0\\ \alpha-\beta-1>0\end{cases}$$

解得,

$$\alpha-\beta>1$$

(4)【答案】(C)

【详解】对于连续函数的曲线而言,拐点处的二阶导数等于零或者不存在.从图上可以看出有两个二阶导数等于零的点,以及一个二阶导数不存在的点 $x=0$.但对于这三个点,最左边的二阶导数等于零的点的两侧二阶导数都是正的,所以对应的点不是拐点.而另外两个点的两侧二阶导数是异号的,对应的点才是拐点,所以应该选(C)

(5)【答案】(D)

【详解】$2x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)(1)$,

$-2y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)(2)$

(1)与(2)联立可解得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial u}=2(x-y)\\ \dfrac{\partial f}{\partial v}=-2x^2\end{cases}$$

由

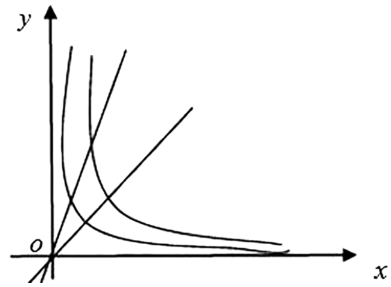
$$\begin{cases}u=1=x+y\\ v=1=\dfrac{y}{x}\end{cases}$$

解得,

$$x=y=\frac{1}{2}$$

所以,$\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\ v=1}}=0$,$\left.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\ v=1}}=-\dfrac{1}{2}$

(6)【答案】(B)



【详解】先画出区域 D,如图所示.转化为极坐标表示即可,即

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdr$$

选择(B).

(7)【答案】(D)

【详解】因为,

$$Ax=b\text{ 有无穷多解}\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})<3,$$

得 $|A|=0$.即 $dz|_{(0,1)}=-dx$,从而 $a=1$ 或 $a=2$

当 $a=1$ 时,

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\1&2&1&\vdots&\alpha\\1&4&1&\vdots&\alpha^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\0&1&0&\vdots&\alpha-1\\0&0&0&\vdots&\alpha^2-3\alpha+2\end{pmatrix}$$

从而 $\alpha^2-3\alpha+2=0\Rightarrow\alpha=1$ 或 $\alpha=2$ 时 x,y,z 有无穷多解

当 $a=2$ 时,

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\1&2&2&\vdots&\alpha\\1&4&4&\vdots&\alpha^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\0&1&1&\vdots&\alpha-1\\0&0&0&\vdots&\alpha^2-3\alpha+2\end{pmatrix}$$

从而 $\alpha^2-3\alpha+2=0\Rightarrow\alpha=1$ 或 $\alpha=2$ 时 x,y,z 有无穷多解

所以选(D)

(8)【答案】(A)

【详解】由已知得

$$f(x_1,x_2,x_3)=Y^TP^TAPY=2y_1^2+y_2^2-y_3^2,Q=PE_{23}E_2(-1),$$

从而

$f(x_1,x_2,x_3)=Y^TQ^TAQY=Y^TE^T2(-1)E_{23}^TP^TAPE_{23}E_2(-1)Y,$

$=Y^TE_2(-1)E_{23}P^TAPE_{23}E_2(-1)Y=2y_1^2-y_2^2+y_3^2,$

其中

$$E_{23}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},E_2(-1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

均为初等矩阵,所以选(A).

(9)【答案】48

【详解】$\frac{dy}{dx}=\frac{3+3t^2}{(1+t^2)^{-1}}=3\ (1+t^2)^2$

$\frac{d^2y}{dx^2}=3\cdot 2\cdot(1+t^2)\cdot 2t\cdot\frac{1}{(1+t^2)^{-1}}=12t\ (1+t^2)^2$

$\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{t=1}=48$

(10)【答案】$n(n-1)\ (\ln 2)^{n-2}$

【详解】$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\ (x^2)^{(k)}\ (2^x)^{(n-k)}=C_n^0\ (x^2)^{(0)}\ (2^x)^{(n)}+C_n^1 2x\ (2^x)^{(n-1)}+C_n^2 2\ (2^x)^{(n-2)}$

$f^{(n)}(0)=C_n^2 2\ (2^x)^{(n-2)}=n(n-1)\ (\ln 2)^{n-2}$

(11)【答案】$f(1)=2$

【详解】把 $x=1$ 代入方程 $\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)dt$ 可得

$$\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt$$

而已知 $\varphi(1)=1$ 所以，$\int_0^1 f(t)dt=1 \qquad (1)$

对方程 $\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)dt$ 两边同时对 x 求导，得

$$\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)dt+2x^2f(x^2),$$

把 $x=1$ 代入上式，得

$$\varphi'(1)=\int_0^1 f(t)dt+2f(1).$$

而由已知 $\varphi'(1)=5$，及(1)可得

$$1+2f(1)=5,$$

解得，$f(1)=2$

(12)【答案】$y(x)=e^{-2x}+2e^x$

【详解】特征方程为 $r^2+r-2=0$，解得特征根为 $r_1=-2$，$r_2=1$，所以，微分方程的通解为

$$y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^x,$$

由已知条件得

$$y'(0)=0,y(0)=3,$$

则 $C_1=1, C_2=2$，则 $y(x)=e^{-2x}+2e^x$.

(13)【答案】$-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy$

【详解】对方程 $e^{x+2y+3z}+2xyz=1$ 两边分别关于 x, y 求导，得

$$e^{x+2y+3z}(2+3\frac{\partial z}{\partial x})+2y(z+x\frac{\partial z}{\partial x})=0,$$

$$e^{x+2y+3z}(2+3\frac{\partial z}{\partial y})+2x(z+y\frac{\partial z}{\partial y})=0,$$

再将 $(0,0)$ 代入得，

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}, \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=-\frac{2}{3},$$

则

$$dz\big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy.$$

(14)【答案】21

【详解】设 A 的特征值为 λ，对应的特征向量为 α，则 $A\alpha=\lambda\alpha$，

$$A^2\alpha=\lambda A\alpha$$

$$\beta\alpha=(A^2-A+E)\alpha=(\lambda^2-\lambda+1)\alpha$$

由 A 的特征值为 2,−2,1，可知 B 的所有特征值为 3,7,1 故

$$|B|=3\cdot 7\cdot 1=21$$

(15)【详解】由题意，

$f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时为等价无穷小，所以，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

即

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+bx\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{kx^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a+1)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3)}{kx^3}$$

得，

$$a=-1, b=-\frac{1}{2}, k=-\frac{1}{3}$$

(16)【详解】由旋转体的体积公式可得，

$$V_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\,(A\sin x)^2dx=\pi A^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2A^2}{4},$$

$$V_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi A\sin x dx=2\pi A,$$

由已知 $V_1=V_2$ 得，

$$\frac{\pi^2A^2}{4}=2\pi A.$$

解得，

$$A=\frac{8}{\pi}$$

(17)【详解】由 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x$ 两边同时对 y 积分可得

$$f'_x(x,y)=(y^2+2y+c_1)e^x(1)$$

可得 $f'_x(x,0)=ce^x$　又由已知　$f'_x(x,0)=(x+1)e^x$，

解得，$c_1=x+1$

代入(1)可得

$$f'_x(x,y)=(y^2+2y+x+1)e^x,$$

两边同时对 x 积分，得

$$f(x,y)=(y+1)^2e^x+xe^x-e^x+c$$

由已知 $f(0,y)=y^2+2y$ 可知 $c=0$

故

$$f(x,y)=(y+1)^2e^x+xe^x-e^x$$

令

$$\begin{cases}f'_x(x,y)=(y^2+2y)e^x+e^x+xe^x=0\\ f'_y(x,y)=(2y+2)e^x=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$$

由题意可知唯一驻点为(1,−1)，即为极值点，所以极值为 $f(1,-1)=0$

(18)【详解】根据对称性可得，

$$I=\iint_D x(x+y)dxdy=\iint_D x^2dxdy+\iint_D xydxdy=2\iint_{D_1}x^2dxdu,$$

其中 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2,y\geqslant x^2,x\geqslant 0\}$，

所以，

$$I=\iint_{D} x(x+y)dxdy=2\iint_{D_1} x^2dxdy=2\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2dy=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.$$

(19)【详解】因为

$$f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}\,dt,$$

则

$$f'(x)=-\sqrt{1+x^2}+2x\sqrt{1+x^2}=(2x-1)\sqrt{1+x^2},$$

由

$F'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$，

因为 $x<\dfrac{1}{2}$ 时，$F'(x)<0$，

$x>\dfrac{1}{2}$ 时，$F'(x)>0$，所以 $x=\dfrac{1}{2}$ 为极值点.

故 $F(\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_1^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+t}\,dt$，又 $F(1)=0$，故 $F(\frac{1}{2})$ 必小于 0.

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}(\int_x^1\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}\,dt)=\lim_{x\to-\infty}(-\int_1^x\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_x^{x^2}\sqrt{1+t}\,dt+\int_1^x\sqrt{1+t}\,dt)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(\int_1^x(\sqrt{1+t}-\sqrt{1+t^2})dt+\int_x^{x^2}\sqrt{1+t}\,dt)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\int_1^x(\frac{t-t^2}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1+t^2}})dt+\lim_{x\to-\infty}\int_x^{x^2}\sqrt{1+t}\,dt$$

$\int_1^x(\dfrac{t-t^2}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1+t^2}})dt<0$，$\int_x^{x^2}\sqrt{1+t}\,dt>0$

所以 $f(x)$ 有两个零点

(20)【详解】由题意可知

$$V'(t)=k(V(t)-20)$$

所以

$$V'(t)-kV(t)=-20k$$

解得

$$V(t)=e^{kt}[20e^{-kt}+c]=20+ce^{kt}$$

又因为 $V(0)=120$，所以 $c=100$

$V(30)=30$ 所以 $e^{30}=\dfrac{1}{10}$，解得

$$k=\frac{-\ln 10}{30}$$

代入 $V(t_0)=21$ 可得 $t_0=60$.所以还需要 30 分钟就 21°了

(21)【证明】切线方程为 $y=f'(b)(x-b)+f(b)$

与 x 轴的交点为 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$

(1)证明 $x_0<b$

因为 $f'(x)>0$,所以 $f'(b)>0$ 且 $f(x)$ 单调增加,

可知 $f(b)>f(a)=0$,易得 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}<b$

(2)证明 $x_0>a$

欲证 $x_0>a$,等价于证明

$$b-\frac{f(b)}{f'(b)}>a\ ,$$

因为 $f'(b)>0$,所以原不等式等价于证明

$$f'(b)(b-a)>f(b)$$

令

$$b=x,F(x)=f'(x)(x-a)-f(x),x>a$$

易知

$$F(a)=0,F'(x)=f''(x)(x-a),\quad (x>a)$$

又因为 $f''(x)>0$, 所以 $F'(x)>0$, 即 $F(x)$ 单调递增.

易得 $F(b)>F(a)=0$,原不等式得证.

(22)【详解】(Ⅰ)

$$A^2=\begin{bmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+1&2a&-1\\2a&a^2&-2a\\1&2a&a^2-1\end{bmatrix},$$

$$A^3=\begin{bmatrix}a^2+1&2a&-1\\2a&a^2&-2a\\1&2a&a^2-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^3+3a&3a^2&-3a\\3a^2&a^2&-3a^2\\3a&3a^2&a^3-3a\end{bmatrix}=0$$

解得, $a=0$.

(Ⅱ)由 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$ 得,

$$X(E-A^2)-AX(E-A^2)=E$$

即

$$(E-A)X(E-A^2)=E$$

所以，

$$X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}$$

当 $a=0$ 时，

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix},$$

则

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix},E-A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix},E-A^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&2\end{bmatrix},$$

进而

$$(E-A)^{-1}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&1&-1\\1&1&0\end{bmatrix},(E-A^2)^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

所以，

$$X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}=\begin{bmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{bmatrix}$$

(23)【详解】(Ⅰ)

由

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\0&b-\lambda&0\\0&3&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(b-\lambda)=0$$

得 B 特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=b$

由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&2&-3\\-1&3-\lambda&-3\\1&-2&a-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)[\lambda^2-(a+2)\lambda+2a-3]$$

由 $A\sim B$ 则 A 与 B 有相同的特征值

解得，$a=4,b=5$

(Ⅱ)由(Ⅰ)得

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix},$$

其中特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$,

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时,解 $(A-E)x=0$ 方程的基础解系为

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}-3\\0\\-1\end{bmatrix};$$

当 $\lambda_3=5$ 时,解 $(A-5E)x=0$ 方程的基础解系为

$$\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},$$

从而 $(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,5\alpha_3)$

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 5\end{pmatrix}$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,所以令 $P=\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,即 $P=\begin{bmatrix}2 & -3 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$,使得

$$P^{-1}Ap=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 5\end{pmatrix}.$$

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试题详解

(1)【答案】(B)

【详解】由已知条件可得，

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\ln^{\alpha}(1+2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^{\alpha}}{x}=2^{\alpha}\lim_{x\to 0}x^{\alpha-1}$$

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\lim_{x\to 0}x^{\frac{2}{\alpha}-1}$$

两式联立解得 $1<\alpha<2$

(2)【答案】(C).

【详解】(A) $\lim_{x\to\infty}(x+\sin x)=\infty$，所以 $y=x+\sin x$ 无水平渐近线，又可知 $y=x+\sin x$ 无垂直渐近线，又 $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1$，$\lim_{x\to\infty}(x+\sin x-x)=\lim_{x\to\infty}\sin x$ 极限不存在，所以 $y=x+\sin x$ 无斜渐近线，

(B) $\lim_{x\to\infty}(x^2+\sin x)=\infty$，所以 $y=x^2+\sin x$ 无水平渐近线，又可知 $y=x^2+\sin x$ 无垂直渐近线，又 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin x}{x}=\infty$，极限不存在，所以 $y=x^2+\sin x$ 无斜渐近线，

(C) $\lim_{x\to\infty}(x+\sin\frac{1}{x})=\infty$，所以 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 无水平渐近线，又可知 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 无垂直渐近线，又 $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=1$，$\lim_{x\to\infty}(x+\sin\frac{1}{x}-x)=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$，所以 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 有斜渐近线 $y=x$，

(D) $\lim_{x\to\infty}(x^2+\sin\frac{1}{x})=\infty$，所以 $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$ 无水平渐近线，又可知 $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$ 无垂直渐近线，又 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin\frac{1}{x}}{x}=\infty$，极限不存在，所以 $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$ 无斜渐近线，

(3)【答案】(D)

【详解】$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，实质为一条连接$[0,f(0)],[1,f(1)]$的直线，所以当$f''(x)\geqslant 0$时，$f(x)$为凹的，由凹凸性的定义或者图形可得，

$$f(x)\leqslant f(0)(1-x)+f(1)x=g(x)$$

(4)【答案】(C)

【详解】直接代入曲率公式可得曲率

$$k=\frac{|x'(t)\cdot y''(t)-x''(t)\cdot y'(t)|}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}\Big|_{t=1}=\frac{|2t\cdot 2-2\cdot(2t+4)|}{[(2t+4)^2+(2t)^2]^{\frac{3}{2}}}\Big|_{t=1}=\frac{1}{10\sqrt{10}}$$

所以，曲率半径

$$R=\frac{1}{k}=10\sqrt{10}$$

(5)【答案】(D)

【详解】由$f(x)=xf'(\xi)$可得$\arctan x=\dfrac{x}{1+\xi^2}$　所以，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\arctan x}-1}{x^2}=\frac{1}{3}$$

(6)【答案】(A)

【详解】由$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2<0$$

即函数$u(x,y)$在区域D内没有极值，所以函数$u(x,y)$的最值只能在边界上取得

(7)【答案】(B)

【详解1】利用行列式性质把此行列式化为拉普拉斯形式

$$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&d&c\\0&0&b&a\end{vmatrix}=-(ad-bc)^2$$

【详解2】按第一列展开

$$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix}a&b&0\\c&d&0\\0&0&d\end{vmatrix}-c\begin{vmatrix}a&b&0\\0&0&b\\c&d&0\end{vmatrix}$$

$$=-ad(ad-bc)+bc(ad-bc)=-(ad-bc)^2$$

所以正确答案为(B)

(8)【答案】(A)

【详解】 ①充分性

若向量组 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关,令 $k=0,l=0$,得 α_1,α_2 线性无关

但 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不一定线性无关,比如若 $\alpha_3=0$ 时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

从而任意常数 k,l,向量组 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关不是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的充分条件.

②必要性

$$(\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3)=(\alpha_1,\quad\alpha_2\quad\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$$

令

$$C=(\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3),A=(\alpha_1,\quad\alpha_2\quad\alpha_3),B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$$

从而 $C=AB$

因为,向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,所以,$r(A)=3$

所以,$r(C)=r(AB)=r(B)=2$

因此,对于任意常数 k,l,向量组 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关

所以正确答案为(A).

(9)【答案】$\dfrac{3}{8}\pi$

【详解】$\displaystyle\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{1}\frac{1}{(x+1)^2+4}dx$

$\displaystyle=\lim_{A\to-\infty}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_A^1=\frac{3\pi}{8}$

(10)【答案】1.

【详解】由 $f'(x)=2(x-1)$, $x\in[0,1]$ 可解得

$$f(x)=x^2-x+c\ ,\ x\in[0,1]$$

又因为 $f(x)$ 为奇函数,则 $f(0)=0$ 　代入 $f(x)=x^2-x+c$,解得,$c=0$

所以,$f(x)=x^2-x$

另一方面,$f(x)$ 是周期为 4 的奇函数,

$$f(7)=f(-1)=-f(1)$$

因此，

$$f(7)=-f(1)=1$$

(11)【答案】$-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy$

【详解】把 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$ 代入 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 得 $z=0$

对方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 两边同时对 x 求导得

$$e^{2yz}\left(2y\frac{\partial z}{\partial x}\right)+1+\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

把 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2},z=0$ 代入解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}=-\frac{1}{2}$$

对方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 两边同时对 y 求导得

$$e^{2yz}\left(2z+2y\frac{\partial z}{\partial y}\right)+2y+\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

把 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2},z=0$ 代入解得

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}=-\frac{1}{2}$$

所以，

$$dz\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy$$

(12)【答案】$y=-x+\frac{\pi}{2}$

【详解】$r=\theta$ 转换成直角坐标方程为 $\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$，方程两边同时对 x 求导，得

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2}$$

即

$$x+yy'=\frac{xy'-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，即 $(x,y)=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 代入上式，得 $y'\Big|_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{2}{\pi}$

于是，切线方程为

$$y-\frac{\pi}{2}=-\frac{2}{\pi}(x-0)$$

即

$$y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$$

(13)【答案】$\frac{11}{20}$

【详解】$\int_0^1(-x^2+2x+1)\,dx=\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right)\Big|_0^1=\frac{5}{3}$

$\int_0^1 x(-x^2+2x+1)\,dx=\int_0^1(-x^3+2x^2+x)\,dx=\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{11}{12}$

(14)【答案】$[-2,2]$

【详解】二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$$

从而知其三个特征值之和为 0

又因为其负惯性指数为 1，所以 $|A|\leqslant 0$，即

$$|A|=a^2-4\leqslant 0\Rightarrow -2\leqslant a\leqslant 2$$

(15)【答案】$\frac{1}{2}$

【详解】

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$

$$=\lim_{t\to0+}\left[\left(\frac{1}{t}\right)^2(e^t-1)-\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to0+}\left[\frac{(e^t-1)-t}{t^2}\right]=\frac{1}{2}$$

(16)【详解】$(1+y^2)\,dy=(1-x^2)\,dx$，由初始条件 $y(2)=0$，得 $y+\frac{1}{3}y^3=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}$

又驻点为 $(1,1)(-1,0)$，则对方程两边求导，推出：$y''(1)=-1$，$y''(-1)=2$，所以，函数的极大值点为 1，极小值点为 0.

(17)【详解】由轮换对称性得,

原式 $=\frac{1}{2}\iint\limits_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\sin(\pi r)rdr=-\frac{3}{4}$

18.【详解】由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-f'(e^x\cos y)e^x\sin y\ ,$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\ \cos^2 y+f'(e^x\cos y)e^x\cos y\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\sin^2 y-f'(e^x\cos y)e^x\cos y$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$$

得

$$f''(e^x\cos y)=4z+e^x\cos y=4f(e^x\cos y)+e^x\cos y$$

所以 $f''(u)=4f(u)+u$,对应的微分方程为 $y''-4y=x$,为二阶非齐次线性微分方程,其齐次通解为 $Y(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}$,非齐次特解为 $Y^*(x)=ax+b$ 代入原微分方程得 $a=-\frac{1}{4}$,$b=0$,所以 $Y^*(x)=-\frac{1}{4}x$,所以非齐次通解 $y(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}-\frac{1}{4}x$,由 $f(0)=0$, $f'(0)=0$,得 $C_1=0$,$C_2=\frac{1}{4}$,所以 $y(x)=\frac{1}{4}x(e^{2x}-1)$,即 $f(u)=\frac{1}{4}u(e^{2u}-1)$.

(19)【详解】(Ⅰ)由 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$,由积分的性质可得

$$\int_a^x 0dt\leqslant\int_a^x g(t)dt\leqslant\int_a^x 1dt$$

所以,

$$0\leqslant\int_a^x g(t)dt\leqslant x-a$$

(Ⅱ)令

$$F(t)=\int_a^{a+\int_a^t g(x)dx}f(x)dx-\int_a^t f(x)g(x)dx$$

则 $F(a)=0$

$$F'(t)=f\left(\int_a^t g(x)dx\right)g(t)-f(t)g(t)$$

由 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 单调增,且 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$,可得

$$F'(t)=f\left(a+\int_a^t g(x)dx\right)g(t)-f(t)g(t)\leqslant f(a+t-a)g(t)-f(t)g(t)=0$$

所以,$F(t)$ 为减函数.因此

$$F(b)=\int_a^{a+\int_a^b g(x)dx} f(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\leqslant F(a)=0$$

即

$$\int_a^{a+\int_a^b g(x)dx} f(x)dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)dx$$

(20)【详解】$f_1(x)=\dfrac{x}{1+x}$,　　$f_2(x)=\dfrac{x}{1+2x}$

$f_3(x)=\dfrac{x}{1+3x}$　,…　,　$f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$

$S_n(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{1+nx}dx$,则

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nS_n=\lim_{n\to\infty}n\int_0^1\frac{x}{1+nx}dx=\lim_{n\to\infty}\left(1-\int_0^1\frac{1}{1+nx}dx\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\ln(1+nx)}{n}\Big|_0^1\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\ln(1+n)}{n}\right)=1$

(21)【详解】由已知

$$f(x,y)=(y+1)^2+\varphi(x),$$

且 $\varphi(x)=-(2-x)\ln x$,则

$$V=\int_1^2\pi(2-x)\ln xdx=\left(2\ln2-\frac{5}{4}\right)\pi$$

(22)【详解】(Ⅰ)

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

从而同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=2x_4\\x_3=3x_4\end{cases}$$

所以方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\alpha=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$

(Ⅱ)令 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,则

$$(A\vdots\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&\vdots&1&0&0\\0&1&-1&1&\vdots&0&1&0\\1&2&0&-3&\vdots&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&\vdots&2&6&-1\\0&1&0&-2&\vdots&-1&-3&1\\0&0&1&-3&\vdots&-1&-4&1\end{pmatrix}$$

所以 $Ax=\beta_1$ 的一个特解为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$Ax=\beta_2$ 的一个特解为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}$

$Ax=\beta_3$ 的一个特解为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

所以

$$B=\begin{pmatrix}-k_1+2&-k_2+6&-k_3-1\\2k_1-1&2k_2-3&2k_3+1\\3k_1-1&3k_2-4&3k_3+1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix},(k_1,k_2,k_3\in R)$$

(23)【详解】令

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1\\0&0&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{pmatrix}$$

则

$$\lambda E-A=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda-n)=0$$

解得，$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$

因为 $A^T=A$，即 A 为实对称矩阵，

所以 A 可相似对角化，即 $A\sim\Lambda$，其中 $\Lambda=\begin{pmatrix}n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & \cdots & -1\\ 0 & \lambda & \cdots & -2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-n\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda-n)=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$ 时，$-B=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & -1\\ 0 & 0 & \cdots & -2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$

即 $r(-B)=1$

所以 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$ 对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量

从而 B 可相似对角化，即 $B\sim\Lambda$，其中 $\Lambda=\begin{pmatrix}n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}$

所以 A 与 B 相似.

2013年全国硕士研究生入学统一考试 数学(二)试题详解

(1)【答案】(C)

【详解】因为 $\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2}$，$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$.所以 $\alpha(x)\sim-\frac{x}{2}$

所以 $\alpha(x)$ 为 x 的同阶且不等价无穷小量

(2)【答案】(A)

【详解】令 $x=0$ 代入 $\cos(xy)+\ln y-x=1$，得 $y=1$，即 $f(0)=1$

对方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 两边同时求导，得

$$-\sin(xy)(y+y')+\frac{y'}{y}-1=0$$

把 $x=0,y=1$ 代入解得 $y'|_{x=0}=2$，即 $f'(0)=2$

所以，

$$\lim_{n\to\infty}n[f(\frac{2}{n})-1]=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}=f'(0)=2$$

(3)【答案】(C)

【详解】在$[0,2\pi]$内，$x=\pi$ 是仅有的第一类间断点，$f(x)$有界，故 $f(x)$在$[0,2\pi]$上可积，$F(x)$在$[0,2\pi]$连续.但由于 $x=\pi$ 是第一类间断点，所以 $F(x)$在该点处不可导

(4)【答案】(D)

【详解】$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^e\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx+\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx$

瑕积分 $\int_1^e\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx$ 的瑕点为 $x=1$，故 $\alpha-1<1$ 时瑕积分收敛；

所以，要使 $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx=-\frac{1}{\alpha}(\ln x)^{-\alpha}|_e^{+\infty}$ 收敛，只需 $\alpha>0$.

(5)【答案】(A)

【详解】因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}\cdot y\cdot f'(xy),\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f(xy)+\frac{y}{x}\cdot x\cdot f'(xy)$$

所以有

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2yf'(xy),$$

(6)【答案】(B)

【详解】由轮换对称性，可知

$$I_1=I_3=0$$

第二象限横坐标为负，纵坐标为正；第四象限横坐标为正，纵坐标为负.所以，

$$I_2>0,I_4<0$$

(7)【详解】由已知 $AB=C$，即

$$A(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

得 $Ab_i=c_i(i=1,2,\cdots,n)$，即 C 的每一列向量可由 A 的列向量组线性表示.

因为 B 为可逆矩阵，从而 $A=CB^{-1}$；同理可得 A 的每一列向量可由 C 的列向量组线性表示.

故 A 的列向量组与 C 的列向量组等价，正确选项为(B)

(8)【答案】(B)

【详解】由 $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 为实对称矩阵，$B=\begin{pmatrix}2&&\\&b&\\&&0\end{pmatrix}$ 为对角矩阵.

故矩阵 A 与 B 相似的充分必要条件是特征值都相同.而 B 的特征值为 $2,b,0$

由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&a&1\\a&b-\lambda&a\\1&a&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda[2a^2-(\lambda-2)(\lambda-b)]=0$$

可得 A 的特征值为 $2a^2+2,b,0$，从而 $a=0$，b 为任意实数，正确选项为(B)

(9)【答案】$e^{\frac{1}{2}}$

【详解】$\lim\limits_{x\to0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}}=e^{\frac{1}{2}}$

(10)【答案】$\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$

【详解】由题可知，

$$f(-1)=0,f'(x)=\sqrt{1-e^x}\Rightarrow f'(-1)=\sqrt{1-e^{-1}}\ ,$$

所以有，

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=0}=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$$

(11)【答案】$\frac{\pi}{12}$

【详解】由题知，

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta d\theta=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 6\theta)d\theta=\frac{\pi}{12}$$

(12)【答案】$y=-x+\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}$

【详解】由题知，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{1+t^2}}=t\ ,$$

所以 $t=1$ 相对应点处导数

$$\frac{dy}{dx}=t\ |_{t=1}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\arctan 1=\frac{\pi}{4}\\ y_0=\ln\sqrt{1+1^2}=\ln\sqrt{2}\end{cases}$$

过 (x_0,y_0) 的法线方程为 $y-y_0=-1(x-x0)$ 即为

$$y=-x+\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}$$

(13)【答案】$y=e^{3x}-e^x-xe^{2x}$

【详解】根据题意可知，对应的齐次微分方程的 2 个线性无关的解为 e^{3x}，e^x

所以，齐次微分方程的通解为

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^x$$

所以，非齐次微分方程的通解为

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^x-xe^{2x}$$

$y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1$ 代入非齐次通解，解得 $C_1=1,C_2=-1$

所以，微分方程的解为：

$$y=e^{3x}-e^x-xe^{2x}$$

(14)【答案】-1

【详解】由已知 $A_{ij}+a_{ij}=0$，得 $A_{ij}=-a_{ij}$，即 $A^*=-A^T$

两边取行列式得

$$|A^*|=|-A^T|\Rightarrow|A^*|=-|A|$$

又因为

$$|A^*|=|A|^{n-1}=|A|^2$$

从而 $|A|^2=-|A|$　　解得，$|A|=0,-1$

由 $A^*=-A^T$　得，$A^TA=-|A|E$

若 $|A|=0$，则 $A^TA=0$，与已知 A 为三阶非零矩阵相矛盾

故 $|A|=-1$

(15)【详解】利用泰勒公式有：

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\cos 2x=1-\frac{1}{2}(2x)^2+o(x^2)=1-2x^2+o(x^2),$$

$$\cos 3x=1-\frac{1}{2}(3x)^2+o(x^2)=1-\frac{9}{2}x^2+o(x^2),$$

所以

$$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x=[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]\cdot[1-2x^2+o(x^2)]\cdot[1-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)]$$

$$=1-[1-\frac{1}{2}x^2-2x^2-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)]=7x^2+o(x^2)$$

可得，当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\sim7x^2$，所以当 $x\to0$ 时，$7x^2\sim ax^n$，所以有 $a=7,n=2$.

(16)【详解】由旋转体的体积公式：$V_x=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx$

得 D 绕 x 轴旋转体的体积

$$V_x=\pi\int_0^a(x^{\frac{1}{3}})^2dx=\frac{3\pi}{5}a^{\frac{5}{3}},$$

又因为 D 绕 y 轴旋转体的体积，可以由整个圆柱体体积减去 D_1 绕 y 轴旋转体的体积得到，其中 D_1 是由 $x=y^3,y=a^{\frac{1}{3}},x=0$ 所围成.所以

$$V_y=\pi a^2a^{\frac{1}{3}}-\pi\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}(y^3)^2dy=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}},$$

又由 $V_y=10V_x$，所以

$$\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}=10\,\frac{3\pi}{5}a^{\frac{5}{3}}$$

解得，$a=7\sqrt{7}$.

(17)【详解】由于区域 D 为非 X 非 Y 型区域，将其分成两个 X 型区域 D_1,D_2，所以

$$\iint_D x^2dxdy=\iint_{D_1} x^2dxdy+\iint_{D_2} x^2dxdy ,$$

而

$$\iint_{D_1} x^2dxdy=\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{3}}^{3x} x^2dy=\frac{32}{3}$$

$$\iint_{D_2} x^2dxdy=\int_2^6 dx\int_{\frac{x}{3}}^{8-x} x^2dy=128$$

所以

$$\iint_D x^2dxdy=\frac{416}{3}$$

(18)【详解】(Ⅰ)做辅助函数

$$F(x)=f(x)-x,\ x\in[0,1]$$

由题意得 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，又 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(0)=0$，故

$$F(0)=f(0)-0$$

又 $f(1)=1$，所以

$$F(1)=f(1)-1=0$$

故 $F(0)=F(1)$.由罗尔定理得在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得

$$F'(\xi)=0$$

即 $f'(\xi)=\xi$

(Ⅱ)做辅助函数

$$G(x)=e^x(f'(x)-1),\ x\in[-1,1]$$

所以 $G(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，在 $(-1,1)$ 可导，

由(1) $f'(\xi)=1$ 知，$G(\xi)=0$

又 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f'(x)$ 是偶函数.故 $f'(-\xi)=1$

所以 $G(-\xi)=0=G(\xi)$. $G(x)$ 在 $[-\xi,\xi]$ 上满足罗尔定理，

所以在 $(-\xi,\xi)$ 上至少存在一点 η 使得 $G'(\eta)=0$ 即

$$f''(\eta)+f'(\eta)=1$$

(19)【详解】根据题意可知，只需求

函数 $f(x,y)=x^2+y^2$，在条件 $x^3-xy+y^3-1=0$ 下的最值即可

构造拉格朗日函数：

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^3-xy+y^3-1),$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda(3x^2-y)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda(-x+3y^2)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^3-xy+y^3-1=0\end{cases}$$

解上述程组得

$$x=1,y=1$$

$f(1,1)=2$,可得距离为 $\sqrt{2}$.

再求边界上的 $f(x,y)=x^2+y^2$ 最值,

当 $x=0$ 时,由

$$x^3-xy+y^3-1=0$$

得 $y=1$,所以 $f(0,1)=1$,可得距离为 1.

当 $y=0$ 时,由

$$x^3-xy+y^3-1=0$$

得 $x=1$,所以 $f(1,0)=1$,可得距离为 1.

综上可得最小距离为 1,最大距离为 $\sqrt{2}$.

(20)【详解】(Ⅰ)由函数

$$f(x)=\ln x+\frac{1}{x},x>0\ ,$$

得

$$f'(x)=\frac{x-1}{x^2},$$

所以 $f(x)$ 的唯一柱点为 $x=1$,又因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减,在 $(1,+\infty)$ 单调递增,所以 $x=1$ 为极小值点,也是最小值点,所以 $f(1)=1$ 是最小值.

(Ⅱ)利用单调有界准则证明

由(1)知任意 $x>0,\ln x+\dfrac{1}{x}\geqslant 1$,所以

$$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}=\ln x_n+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}<1\ ,$$

又因 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}\geqslant 1$,所以

$$\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}<0,$$

即 $x_n<x_{n+1}$，所以 $\{x_n\}$ 单调递增.

因 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$，得

$$\frac{1}{x_{n+1}}>0,$$

所以 $\ln x_n<1$，所以 $x_n<e$，即 $\{x_n\}$ 有上界.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$ 两边同时取极限，得

$$\ln A+\frac{1}{A}<1,$$

又由(1)知 $\ln A+\frac{1}{A}\geqslant 1$，故

$$\ln A+\frac{1}{A}=1,$$

所以 $A=1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

(21)【详解】(Ⅰ)

由弧长公式得

$$s=\int_1^e\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_1^e\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1+e^2}{4}$$

(Ⅱ)由形心公式得

$$\bar{x}=\frac{\int_1^e x\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x\right)dx}{\int_1^e\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x\right)dx}=\frac{3(e^4-2e^2-3)}{4(e^2-7)}.$$

(22)【详解】设矩阵

$$C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix},$$

则

$$AC=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+ax_3 & x_2+ax_4\\ x_1 & x_2\end{pmatrix}$$

$$CA=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2 & ax_1\\ x_3+x_4 & ax_3\end{pmatrix}$$

$$AC-CA=\begin{pmatrix} x_1+ax_3 & x_2+ax_4 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x_1+x_2 & ax_1 \\ x_3+x_4 & ax_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -x_2+ax_3 & -ax_1+x_2+ax_4 \\ x_1-x_3-x_4 & x_2-ax_3 \end{pmatrix}$$

由 $AC-CA=B$，得

$$\begin{cases} -x_2+ax_3=0 \\ -ax_1+x_2+ax_4=1 \\ x_1-x_3-x_4=1 \\ x_2-ax_3=b \end{cases}$$

此为 4 元非齐次线性方程组，欲使得矩阵 C 存在，则此非齐次线性方程组必有解，从而增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & b \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}$$

所以当 $1+a=0$，$b=0$，即 $a=-1$，$b=0$ 时，非齐次线性方程组有解，存在矩阵 C，使得

$$AC-CA=B$$

又

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1+c_2+1 \\ -c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

所以

$$C=\begin{pmatrix} c_1+c_2+1 & -c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}\ (c_1,c_2\text{ 为任意实数})$$

(23)【详解】(Ⅰ)

$f(x_1,x_2,x_3)=2(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$

$$=2\left[(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\right]+\left[(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\right]$$

$=X^T(2\alpha\alpha^T)X+X^T(\beta\beta^T)=X^T(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)X$

故二次型 f 对应的矩阵

$$A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$$

(Ⅱ)因为 α,β 正交且都为单位向量，即

$$\beta^T\alpha=0,\alpha^T\beta=0,\alpha^T\alpha=1,\beta^T\beta=1$$

故

$$A\alpha=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\alpha=2\alpha$$

从而矩阵 A 的其中一个特征值为 $\lambda_1=2$

同理可得

$$A\beta=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\beta=\beta\ ,$$

即矩阵 A 的其中一个特征值为 $\lambda_2=1$

又因为

$$r(\alpha\alpha^T)=1,r(\beta\beta^T)=1$$

所以

$$r(A)=r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\leqslant 2$$

从而矩阵 A 的其中一个特征值为 $\lambda_3=0$

故若 α,β 正交且都为单位向量，二次型 f 经正交变换后的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$

2012年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试题详解

(1)【答案】(C)

【详解】

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1}=\infty\ ,$$

有1条垂直渐近线；

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1\ ,$$

有1条水平渐近线；

(2)【答案】(A)

【详解】由已知 $f(0)=0$,则

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)=(^-1)\ n-1(n-1)!$$

(3)【答案】(B).

【详解】$\{s_n\}$ 有界可得出 $\{a_n\}$ 部分和有界,则得出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,反过来 $\{a_n\}$ 收敛,得不出 $\{s_n\}$ 有界,比如调和级数.

(4)【答案】(D)

【详解】$I_1=\int_0^\pi e^{x^2}\sin x dx>0$,

$$I_2=\int_0^{2\pi}e^{x^2}\sin x dx=\int_0^\pi e^{x^2}\sin x dx-\int_0^\pi e^{(x+\pi)^2}\sin x dx=I_1-\int_0^\pi e^{(x+\pi)^2}\sin x dx<I_1$$

$$I_3=\int_0^{3\pi}e^{x^2}\sin x dx=I_2+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x dx\qquad=\int_0^\pi e^{x^2}\sin x dx-\int_0^\pi e^{(x+\pi)^2}\sin x dx+\int_0^\pi e^{(x+2\pi)^2}\sin x dx$$

$$=I_1+\int_0^\pi(e^{(x+2\pi)^2}-e^{(x+\pi)^2})\sin x dx>I_1$$

(5)【答案】(D)

【详解】由已知,$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$,则若 $x_1<x_2$,有

$$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1),$$

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,则若 $y_1>y_2$,有

$$f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2),$$

于是有

$$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2).$$

(6)【答案】(D)

【详解】二重积分化累次积分计算即可.

$$\iint_D (xy^2-1)dxdy=\int_{-1}^{1}dy\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y}(xy^2-1)dx=-\pi$$

(7)【答案】(C).

【详解】由 $\alpha_3+\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\c_5\end{pmatrix}$ 必与 α_1 线性相关,从而 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关,故应选(C).

(8)【答案】(B).

【详解】由题设,

$$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

从而

$$Q^{-1}AQ=\left((\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)^{-1}A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

故应选(B).

(9)【答案】1

【详解】等式两边同时对等式两边对 x 求导，即可得出

$$2x-y'=e^{y}y'$$

两边同时再对 x 求导

$$2-y''=e^{y}y'^{2}+e^{y}y'',.$$

又

$$y(0)=0,y'(0)=0$$

所以，$y''(0)=1$

(10)【答案】$\frac{\pi}{4}$

【详解】$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^{2}}+\frac{1}{2+n^{2}}+\cdots+\frac{1}{n^{2}+n^{2}}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^{2}}\right)=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^{2}}dx=$

$\frac{\pi}{4}$

(11)【答案】0

【详解】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{1}{x},\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\left(-\frac{1}{y^{2}}\right),$$

于是

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y^{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

(12)【答案】$y=\sqrt{x}$

【详解】方程可整理为

$$\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=3y,$$

将 x 看做因变量，为一阶线性非齐次微分方程，代公式得

$$x=e^{-\int\frac{1}{y}dy}\left(\int 3ye^{\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right),$$

整理计算，得

$$x=(y^{3}+C)\frac{1}{y},$$

又

$$y(1)=1,$$

于是，特解为 $y=\sqrt{x}$.

(13)【答案】(−1,0)

【详解】

$$y'=2x+1, y''=2 .$$

代入曲率公式，可解得，

$$x=-1, y=0 .$$

(14)【答案】−27.

【详解】设

$$E_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

则 $B=E_{12}A$ ，从而

$$|BA^*|=|E_{12}AA^*|=-|A|^3=-27 .$$

(15)【详解】(Ⅰ)

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x(1+x)-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x(1+x)-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+2x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{2+\sin x}{2}=1.$$

解得 $a=1$

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x^k}=$不为 0 的常数． 即，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x^{k+1}\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x^{k+2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-x-\frac{x^3}{6}-x\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+o(x^3)}{x^{k+2}}$$

解得，$k=1$

(16)【详解】令

$$\begin{cases}f'_x=e^{-\frac{x2+y2}{2}}(1-x^2)=0\\ f'_y=-xye^{-\frac{x2+y2}{2}}=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=1,\\ y=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1.\\ y=0.\end{cases}$$

又

$A=f''_{xx}=-xe^{-\frac{x2+y2}{2}}(1-x^2)-2xe^{-\frac{x2+y2}{2}}$，$B=f''_{xy}=-ye^{-\frac{x2+y2}{2}}(1-x^2)$，

$C=f''_{yy}=xe^{-\frac{x2+y2}{2}}(-1+y^2)$

分别把 $\begin{cases}x=1,\\y=0,\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=-1.\\y=0.\end{cases}$ 代入 A,B,C 中可知

$\begin{cases}x=1,\\y=0,\end{cases}$ 为函数的极大值点，极大值为 $e^{-\frac{1}{2}}$

$\begin{cases}x=-1,\\y=0,\end{cases}$ 是极小值点，极小值为 $-e^{-\frac{1}{2}}$.

(17)【详解】切点 A 坐标为 $(x_0,\ln x_0)$，斜率为 $\frac{1}{x_0}$，这样，切线方程为

$$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0),$$

过(0,1)点，可求得 $x_0=e^2$，切线方程为

$$y=\frac{1}{e^2}x+1,$$

B 点坐标为 $(-e^2,0)$，区域 D 的面积为

$$S=\int_0^2(e^y-e^2(y-1))\,dy=e^2-1,$$

$$V=\int_{-e2}^{e2}\pi\left(\frac{1}{e^2}x+1\right)^2dx-\int_1^{e2}\pi(\ln x)^2dx=\left(\frac{2e^2}{3}+2\right)\pi$$

(18)【详解】

$$\iint_D xy\,d\sigma=\int_0^\pi d\theta\int_0^{1+\cos\theta}r^3\cos\theta\sin\theta\,dr=\frac{1}{4}\int_0^\pi\cos\theta\sin\theta\,(1+\cos\theta)^4d\theta$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^\pi\cos\theta\,(1+\cos\theta)^4d\cos\theta=\frac{1}{4}\int_{-1}^1 t\,(1+t)^4dt=\frac{16}{15}$$

(19)【详解】(Ⅰ)解二阶齐次微分方程及一阶线性微分方程组

$$\begin{cases}f''(x)+f'(x)-2f(x)=0\\f''(x)+f(x)=2e^x\end{cases}$$

解得

$$f(x)=e^x$$

(Ⅱ)由 $f(x)=e^x$ 可得

$$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,dt=e^{x2}\int_0^x f(-t^2)\,dt$$

$$y'=2xe^{x^2}\int_0^x f(-t^2)\,dt+e^{x^2}f(-x^2)=2xe^{x^2}\int_0^x f(-t^2)\,dt+1$$

$$y''=(2e^{x^2}+4x^2e^{x^2})\int_0^x f(-t^2)\,dt+2x$$

二阶导数存在,且当 $x=0$ 时,二阶导数等于零,三阶导数

$$y'''(0)=4\neq 0$$

所以(0,0)点为其拐点.

(20)【详解】令

$$f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\text{,则 }f(0)=0$$

$f(x)$ 为偶函数,我们只需要证明 $0<x<1$,

$$f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}>0$$

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)-\sin x-x\ ,$$

$$f''(x)=2\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+x\left(-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}\right)-\cos x-1$$

$$=\frac{4}{1-x^2}+x\left(-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}\right)-\cos x-1$$

由 $0<x<1$ 可得,

$$\frac{4}{1-x^2}>4\ ,$$

$$x\left(-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}\right)>0\ ,$$

$$-2\leqslant-\cos x-1\leqslant-1\ ;$$

所以当 $0<x<1$,$f''(x)>0$.

因此,当 $0<x<1$ 时 $f'(x)$ 单调递增.而 $f'(0)=0$,所以

$$f'(x)>f'(0)=0\ .$$

得出 $f(x)$ 为增函数,又由 $f(0)=0$,得出当 $0<x<1$,

$$f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}>0$$

即 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x>1+\dfrac{x^2}{2}$

(21)【详解】(Ⅰ)证明:令 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1\ (n>1)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2^n}<0$$

$$f(1)=n-1>0.$$

由零点定理可得，$f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上至少有一个零点.

又因为

$$f'(x)=nx^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1>0,$$

所以，$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调增，所以，

$$f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$$

在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上有且仅有一个零点.

(Ⅱ)由 $f(x_{n+1})-f(x_n)=0$ 可得出

$$x_{n+1}^{n+1}+(x_{n+1}^n-x_n^n)+\cdots+(x_{n+1}-x_n)=0,$$

得，$x_{n+1}-x_n<0$，数列 $\{x_n\}$ 单调减，又 $\{x_n\}$ 满足方程

$$x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1,$$

知 $\{x_n\}$ 有界.

综上所述，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.对等式

$$f(x_{n+1})-f(x_n)=0$$

两边同时取极限，可得 $a=\frac{1}{2}$.

(22)【详解】(Ⅰ)按照第一列展开，得

$$|A|=1+(-1)^5a^4=1-a^4.$$

(Ⅱ)若 $Ax=\beta$ 有无穷多解，则 $|A|=0$，即 $1-a^4=0$，解得 $a=1$ 或 $a=-1$.

当 $a=1$ 时，

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

$r(A)<r(\overline{A})$，方程组 $Ax=\beta$ 无解.

当 $a=-1$ 时，

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，其通解为

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\text{，其中 } k \text{ 为任意常数}$$

(23)【详解】(Ⅰ)对 A 初等行变换，

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由 $r(A)=r(A^TA)=2$，得 $a=-1$.

(Ⅱ)

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$$

由 A^TA 的特征多项式

$$|\lambda E-A^TA|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\-(\lambda-2)&\lambda-2&-2\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&0&-2\\-1&\lambda-2&-2\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&\lambda-2&-4\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)$$

得矩阵 A^TA 的特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=2$ 时，解得 $(2E-A^TA)x=0$ 的基础解系

$$\alpha_1=(1,-1,0)^T;$$

当 $\lambda_2=6$ 时，解得 $(6E-A^TA)x=0$ 的基础解系

$$\alpha_2=(1,1,2)^T;$$

当 $\lambda_3=0$ 时，解得 $(0E-A^TA)x=0$ 的基础解系

$$\alpha_3=(1,1,-1)^T;$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 已是正交向量组，只需单位化，

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，经过正交变换 $x=Qy$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$ 化成标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+6y_2^2.$$

2011 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(二)试题详解

(1)【答案】(C)

【详解 1】$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$，$\sin 3x = 3x - \dfrac{27x^3}{3!} + o(x^3)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x - \sin 3x}{cx^k} = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{9x^3}{2}+o(x^3)}{cx^k} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{cx^k} = 1$$

所以 $c=4$，$k=3$

【详解 2】$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x - \sin 3x}{cx^k} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos x - 3\cos 3x}{ckx^{k-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{ck}\,\frac{-2\sin 2x\sin(-x)}{x^{k-1}}$

$$=\frac{12}{ck}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{k-1}} = 1$$

所以 $k-1=2$，$ck=12$，即 $k=3$，$c=4$

(2)【答案】(B)

【详解】$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-x^2f(0)}{x^3} - \frac{2f(x^3)-2f(0)}{x^3}$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-x^2f(0)}{x^3} - \lim_{x\to 0}\frac{2f(x^3)-2f(0)}{x^3}$$

$$= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0)$$

(3)【答案】(C)

【详解】令 $f'(x)=0$，解得驻点 $x = 2 \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(4)【答案】(C)

【详解】特征值为 $\pm\lambda$，非齐次项中 $\pm\lambda$ 分别与特征根相等，则特解可设为

$$xae^{\lambda x} + xbe^{-\lambda x}$$

整理得

$$x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$$

(5)【答案】(A)

【详解】根据

$$\begin{cases} z_x = f'(x)g(y) = 0 \\ z_y = f(x)g'(y) = 0 \end{cases},$$

$z_{xx} = f''(x)g(y), z_{yy} = f(x)g''(y), z_{xy} = f'(x)g'(y)$

对于 $(0,0)$，

$$z_{xx}(0,0) = f''(0)g(0)，z_{yy} = f(0)g''(0), z_{xy} = f'(0)g'(0)$$

已知 $f(0) > 0, g(0) < 0, f'(0) = g'(0) = 0$

根据题意可判断 $f''(0) < 0, g''(0) > 0$

(6)【答案】(B)

【详解】在区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上，

$\sin x < \cos x < \cot x$，$\ln x$ 是增函数，

所以

$$\ln\sin x < \ln\cos x < \ln\cot x，$$

由定积分比较大小的性质可知，应选(B)

(7)【答案】(D).

【详解】由初等变换及初等矩阵的性质易知 $P_2AP_1 = E$，从而

$$A = P_2^{-1}P_1^{-1} = P_2P_1^{-1}，$$

答案应选(D).

(8)【答案】(D).

【详解】由 $(1,0,1,0)^T$ 是方程 $AX = 0$ 的一个基础解系，知 $r(A) = 3$，从而

$$r(A^*) = 1, |A| = 0，$$

于是

$$A^*A = |A|E = 0，$$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为 $A^*X = 0$ 的解.

由 $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$，知 α_1, α_3 线性相关，由 $r(A) = 3$，知 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，$r(A^*) = 1$，从而 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为 $A^*X = 0$ 的基础解系，故应选(D).

(9)【答案】$\sqrt{2}$

【详解】$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+\frac{1+2x}{2}-1)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{2x-1}{2}} = \sqrt{2}$

(10)【答案】$e^{-x}\sin x$

【详解】$y=e^{-\int 1dx}(C+\int e^{-x}\cos x e^{\int 1dx}dx)=e^{-x}(C+\sin x)$，由于 $y(0)=0$，所以 $y=e^{-x}\sin x$

(11)【答案】$\ln(\sqrt{2}+1)$

【详解】$s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx=\ln(\sqrt{2}+1)$

(12)【答案】$\frac{1}{\lambda}$

【详解 1】$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$

【详解 2】由题意可知，此函数为指数函数的概率密度函数，要求的是指数函数的数学期望，直接可得答案为 $\frac{1}{\lambda}$．

(13)【答案】$\frac{7}{12}$

【详解】$\iint\limits_D xy\,d\sigma=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\sin\theta cox\theta dr=\frac{7}{12}$

(14)【答案】2.

【详解 1】二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 易经过配方法化为 $y_1^2+4y_2^2$，从而正惯性指数为 2.

【详解 2】本题亦可通过求二次型矩阵的特征值进一步得到正惯性指数为 2.

(15)【详解】由 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0+}F(x)=0$，易知 $a>0$，

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，得

$$\lim_{x\to0+}F(x)=\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{ax^{a-1}}=0$$

故 $2>a-1$，所以 $a<3$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，得

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}}$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2}\frac{1}{a(a-1)x^{a-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^{3-a}}{1+x^2}\frac{1}{a(a-1)}=0$ 故 $3-a<2$，所以 $a>1$

综上 $1<a<3$

(16)【详解】$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}=\frac{4t}{(t^2+1)^3}$

当 $t=1$ 时，

$$x=\frac{5}{3}, y'=0, y''>0,$$

从而 $y=-\frac{1}{3}$ 是极小值；

当 $t=-1$ 时，

$x=-1$，$y'=0, y''<0$，

从而 $y=1$ 是极大值；

当 $t=0$ 时，$x=\frac{1}{3}$，$y''=0$

当 $t<0$ 时，

$$x\in(-\infty,\frac{1}{3}), y''<0$$

从而 $(-\infty,\frac{1}{3})$ 为凸区间，

当 $t>0$ 时，

$$x\in(\frac{1}{3},+\infty), y''>0$$

从而 $(\frac{1}{3},+\infty)$ 为凹区间，所以 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.为拐点.

(17)【详解】由于 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值，故必有 $g'(1)=0$.

由题又知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot y+f'_2\cdot yg'(x),$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=1}=f'_1(y,y)\cdot y$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=1}\right)=\frac{d}{dy}(f'_1(y,y)\cdot y)=[f''_{11}(y,y)+f''_{11}(y,y)]y+f'_1(y,y)$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}(1,1)+f''_{12}(1,1)+f'_1(1,1)$$

(18)【详解】由题意知 $y(0)=0, y'(0)=1$，因为 α 为曲线 l 在点 (x,y) 外切线的倾角，所以 $\tan\alpha=\frac{dy}{dx}$，两边同时对 x 求导数，得

$$\sec^2\alpha\frac{d\alpha}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

由题知 $\frac{d\alpha}{dx}=\frac{dy}{dx}$,并且 $\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha$ 所以得微分方程

$$\begin{cases}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3,\\ y(0)=0,\\ y'(0)=1\end{cases}$$

此方程是不显含 x 的微分方程

令 $y'=p$,则 $y''=p\frac{dp}{dy}$,代入方程得

$$\frac{dp}{1+p^2}=dy\ ,$$

解得 $y'=\tan(y+C_1)$ 　由 $y'(0)=1$ 解得 $C_1=\frac{\pi}{4}$,

微分方程 $y'=\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)$ 是可分离变量方程,解得

$$\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=Ce^x$$

由 $y(0)=0$ 解得 $C=1$.

所以

$$y(x)=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^x\right)-\frac{\pi}{4}$$

(19)

(Ⅰ)【详解 1】转化为函数不等式,先证明 $0<x\leqslant 1$,有 $\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$.

设 $f(x)=\ln(1+x)-x$,则当 $0<x\leqslant 1$ 时,有

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1<0$$

$f(x)$ 单调减少,故 $f(x)<f(0)=0$,所以 $\ln(1+x)<x$;

设 $g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$,当 $0<x\leqslant 1$ 时,有

$$g'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}>0,$$

$g(x)$ 单调增加,故 $g(x)>g(0)=0$,所以

$$\ln(1+x) > \frac{x}{1+x};$$

故 $0 < x \leqslant 1$，有

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$$

成立.

令 $x=\frac{1}{n}$，即有 $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ 成立.

【详解 2】设 $f(x)=\ln(1+x)$，在 $[0,x]$ 上应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x)-f(0)=\frac{1}{1+\xi}(x-0), 0<\xi<x$$

即 $\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}$，又 $0<\xi<x$，有 $\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x$，于是，

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x,$$

令 $x=\frac{1}{n}$，即有 $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ 成立.

(Ⅱ)【详解】由题设，考查

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0,$$

故数列 $\{a_n\}$ 为单调递减数列；

又由①可知，

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}),$$

故

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n > \ln(1+\frac{1}{1})+\ln(1+\frac{1}{2})+\dots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n=\ln(\frac{1}{n}\frac{2}{1}\frac{3}{2}\dots\frac{n+1}{n})=\ln\frac{n+1}{n}>0$$

所以，由单调有界数列收敛准则知，数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(20)【详解】(Ⅰ)容积

$$V=V_1+V_2=2V_1=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)dy=\frac{9}{4}\pi$$

(Ⅱ) $W=F\cdot S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2-y)\rho g\pi x_1^2 dy+\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2-y)\rho g\pi x_2^2 dy$

$$=\pi\rho g\left(\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2-y)(2y-y^2)dy+\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2-y)(1-y^2)dy\right)$$

$$=\frac{27}{8}\pi\rho g$$

(21)【详解】根据二重积分的计算

$$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy=\int_0^1 x\left(\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy\right)dx$$

$$\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1 ydf'_x(x,y)=(yf'_x(x,y))\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f'_x(x,y)dy$$

$$=f'_x(x,1)-\int_0^1 f'_x(x,y)dy=-\int_0^1 f'_x(x,y)dy$$

则原式$=\int_0^1 x\left(-\int_0^1 f'_x(x,y)dy\right)dx=-\int_0^1\left(\int_0^1 xf'_x(x,y)dx\right)dy$

$$=-\int_0^1\left(\int_0^1 xf'_x(x,y)dx\right)dy=-\int_0^1\left(\int_0^1 xdf(x,y)\right)dy$$

$$=-\int_0^1\left((xf(x,y))\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy$$

$$=-\int_0^1\left(f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy=\iint_D f(x,y)dxdy=a$$

(22)【详解】(Ⅰ)易知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,由其不能被 β_1,β_2,β_3 线性表出,得到 β_1,β_2,β_3 线性相关,从而 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)<3$.

由

$$\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&2&a-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&a-5\end{pmatrix}$$

得 $a=5$.

(Ⅱ)

由

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}$$

得
$$(\beta_1\quad \beta_2\quad \beta_3)=(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3)\begin{pmatrix}2&1&5\\4&2&10\\-1&0&-2\end{pmatrix}$$

(23)【详解】

(Ⅰ)易知特征值-1对应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，特征值1对应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

又由$r(A)=2$知A的另一个特征值为0.因为实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交，从而特征值0对应的特征向量为$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

(Ⅱ)由
$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}^{-1}$$
得
$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

2010年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试题详解

(1)【答案】(B).

【详解】函数在 $x=0,\pm 1$ 处无定义，所以间断点有3个，由于

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=-1,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \lim_{x\to -1} f(x)=-\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\infty$$

因此，$x=0$ 是跳跃间断点，$x=1$ 是可去间断点，$x=-1$ 是无穷间断点.故应选(B)

(2)【答案】(A)

【详解】由题意知 $\begin{cases} y'_1+p(x)y_1=q(x) & (1) \\ y'_2+p(x)y_2=q(x) & (2) \end{cases}$

$\lambda(1)+\mu(2)$ 得：

$$(\lambda y'_1+\mu y'_2)+p(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=(\lambda+\mu)q(x)$$

所以

$$\lambda+\mu=1$$

$\lambda(1)-\mu(2)$ 得：

$$(\lambda y'_1-\mu y'_2)+p(x)(\lambda y_1-\mu y_2)=(\lambda-\mu)q(x)$$

所以

$$\lambda-\mu=0$$

综上 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$.

(3)【答案】(C)

【详解】$(x^2)'=2x=(a\ln x)'=\dfrac{a}{x}$，可得，

$$x^2=\frac{a}{2},$$

由 $x^2=a\ln x$，可得，

$$x=e^{\frac{1}{2}},a=2e$$

(4)【答案】(D)

【详解】显然 $x=0,x=1$ 是两个瑕点,有

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$$

对于 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的瑕点 $x=0$,当 $x\to 0^+$ 时

$$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=\ln^{\frac{2}{m}}(1-x)x^{-\frac{1}{n}} \text{ 等价于 } (-1)^{\frac{2}{m}}x^{\frac{2}{m}-\frac{1}{n}},$$

而 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\frac{2}{m}-\frac{1}{n}}dx$ 收敛(因 m,n 是正整数 $\Rightarrow \frac{2}{m}-\frac{1}{n}>-1$),故 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛;

对于 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的瑕点 $x=1$,当 $x\in(1-\delta,1)(0<\delta<\frac{1}{2})$ 时

$$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}<2^{\frac{1}{n}}\ln^{\frac{2}{m}}(1-x)<2^{\frac{1}{n}}(1-x)^{\frac{2}{m}}$$,而 $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{\frac{2}{m}}dx$ 显然收敛,

故 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛.所以选择(D).

(5)【答案】(B)

【详解】等式两边求全微分得:

$$(F'_1u_x+F'_2v_x)dx+(F'_1u_y+F'_2v_y)dy+(F'_1u_z+F'_2v_z)dz=0,$$

所以有,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_1u_x+F'_2v_x}{F'_1u_z+F'_2v_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_1u_y+F'_2v_y}{F'_1u_z+F'_2v_z},$$

其中,

$$u_x=-\frac{y}{x^2},\ u_y=\frac{1}{x},\ u_z=0,\ v_x=-\frac{z}{x^2},\ v_y=0,\ v_z=\frac{1}{x},$$

代入即可.

(6)【答案】(D).

【详解】

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+\frac{i}{n})}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+(\frac{j}{n})^2)}\frac{1}{n}=\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$$

(7)【答案】(A)

【详解】设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s)$，

由题设知

向量组 $I:\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 可由向量组 $II:\beta_1,\beta_2\cdots\beta_S$ 线性表示，

即

$$A=BK_{s\times r}\text{（其中 }K\text{ 为系数矩阵）}$$

令 $Ax=0$(其中 $(x_1,\quad x_2,\quad\cdots\quad x_r)^T$)，即在等号 $A=BK_{s\times r}$ 两侧同乘以 x

若向量组Ⅰ线性无关，则 $R(A)=r$

则 $Ax=0$ 只有零解；即 $BK_{s\times r}x=0$ 只有零解.

(利用反证法)若 $r>s$，有 $R(K)\leqslant s<r\Rightarrow BKx=0$ 有非零解，与之相矛盾，

所以 $r\leqslant s$，所以正确答案为(A).

(8)【答案】(D)

【详解】设 A 的特征值为 r，因为 $A^2+A=0$ 所以 $\lambda^2+\lambda=0$

即

$$\lambda(\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda=0\text{ 或 }\lambda=-1$$

又因为 R(A)=3，A 必可相似对角化，且对角阵的秩也是 3.

所以 $\lambda=-1$ 是三重特征根

故

$$A\sim\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$$

所以正确答案为(D)

(9)【答案】$C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$

【详解】解特征方程，

$$\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2=0,$$

特征值为，1，$\pm i$，于是可得通解

$$y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x.$$

(10)【答案】$y=2x$

【详解】首先定义域是全体实数，股不存在垂直渐近线；

其次，

$$\lim_{x\to\infty}y=\infty$$

所以不存在水平渐近线.

最后，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=2\ ,$$

而 $\lim_{x\to\infty}(y-2x)=0$，故斜渐近线为 $y=2x$.

(11)【答案】$-2^n(n-1)!$

【详解】由泰勒展开可得：

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}+\cdots\ ,$$

令 $t=-2x$

代入可得：

$$\frac{(-1)^{n-1}\ (-2x)^n}{n}=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n\ ,$$

比较系数可得答案.

(12)【答案】$\sqrt{2}(e^\pi-1)$

【详解】由弧长公式：

$$\int ds=\int_0^\pi\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\,d\theta=\int_0^\pi\sqrt{2}e^\theta d\theta=\sqrt{2}(e^\pi-1)$$

(13)【答案】$3cm/s$

【详解】对对角线求导数：$\dfrac{d\sqrt{l^2+w^2}}{dt}=\dfrac{ll'+ww'}{\sqrt{l^2+w^2}}$，代入数据即可.

(14)【答案】3

【详解】$|A+B^{-1}|=|B^{-1}(BA+E)|=|B^{-1}(BA+A^{-1}A)|$

$=|B^{-1}(B+A^{-1})A|=|B^{-1}||(B+A^{-1})||A|=\dfrac{1}{|B|}|(B+A^{-1})||A|$

$=\dfrac{1}{2}\times2\times3=3$

(15)【详解】由

$$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t}dt=0\ ,$$

可得，$x=0,\pm1$

在区间 $(-1,0)$，$(1,+\infty)$，$f'(x)\geqslant0$，函数单增

在区间 $(-\infty,-1)$，$(0,1)$，$f'(x)\leqslant0$，函数单减.

所以,极小值为 $f(1)=f(-1)=0$ 极大值为 $f(0)=1-\frac{2}{e}$

所以,单增区间 $(-1,0)$,$(1,\infty)$,单减区间 $(-\infty,-1)$,$(0,1)$

(16)【详解】令 $f(t)=\ln(1+t)-t$

当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时,

$$f'(t)=\frac{1}{1+t}-1\leqslant 0$$

故当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时

$$f(t)\leqslant f(0)=0$$

即 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时

$$0\leqslant \ln(1+t)\leqslant t\leqslant 1$$

从而 $(\ln(1+t))^n\leqslant t^n(n=1,2,\cdots)$ 又由 $|\ln t|\geqslant 0$

得 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|dt(n=1,2,\cdots)$

$\int_0^1|\ln t|t^n dt=-\int_0^1(\ln t)t^n dt=-(\ln t)\frac{1}{n+1}t^{n+1}|_0^1+\int_0^1\frac{1}{n+1}t^n dt=\frac{1}{(n+1)^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1|\ln t|t^n dt=0\quad M_n\geqslant 0$

由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt=0$$

(17)【详解】

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\psi'(t)}{2+2t},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)(2+2t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^3}=\frac{3}{4(1+t)}$$

得到二阶微分方程:

$$\psi''-\frac{1}{1+t}\psi'=3(1+t),$$

所以

$$\psi'=(1+t)(3t+c_1)$$

由 $\psi'(1)=6$,得到 $c_1=0$,所以

$$\psi'(t)=3t(1+t)$$

又因为

$$\psi(1)=\frac{5}{2},$$

所以

$$\psi(t)=t^3+\frac{3}{2}t^2$$

(18)【详解】由已知，质量 $M=\rho V$，求得相应的体积即可，$V=S_{侧}\times h$，$h=1$，

$$S_{侧}=\pi ab-\int_{-a\sqrt{1-\frac{1}{b2}(\frac{b}{2})^2}}^{a\sqrt{1-\frac{1}{b2}(\frac{b}{2})^2}}(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-\frac{b}{2})dx=\frac{2}{3}\pi ab$$

所以油的质量为

$$\frac{2\pi}{3}\rho abl\,(kg)$$

(19)【详解】

$\mu_\xi=\mu_x x_\xi+\mu_y y_\xi$，

$\mu_{\xi\eta}=(\mu_{xx}x_\eta+\mu_{xy}y_\eta)x_\xi+(\mu_{yx}x_\eta+\mu_{yy}y_\eta)y_\xi$

$=x_\xi x_\eta\mu_{xx}+(x_\xi y_\eta+x_\eta y_\xi)\mu_{xy}+y_\xi y_\eta\mu_{yy}=0$

坐标变换可得，

$$x=\frac{b\xi-a\eta}{b-a},\ y=\frac{\eta-\xi}{b-a},$$

所以，

$$x_\xi=\frac{b}{b-a},\ x_\eta=\frac{-a}{b-a},\ y_\xi=\frac{-1}{b-a},\ y_\eta=\frac{1}{b-a}$$

代入上式，并对比

$$4\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}=0,$$

比较系数可得

$$a+b=-\frac{12}{5},\ ab=\frac{4}{5}$$

所以答案为

$$\begin{cases}a=-2\\ b=-\frac{2}{5}\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=-\frac{2}{5}\\ b=-2\end{cases}$$

(20)【详解】将极坐标转化为直角坐标可得积分区域为

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$$

所以

$$I=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos\theta}\,drd\theta=\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}\,d(1-x^2+y^2)=\frac{1}{3}\int_0^1[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}-\frac{3\pi}{16}$$

(21)【详解】令

$$F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$$

$$F(1)=F(0)=0$$

分别由拉格朗日中值定理可得存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right),\eta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得

$$F'(\xi)=\frac{F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=-2F\left(\frac{1}{2}\right),F'(\eta)=\frac{F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)}{\frac{1}{2}}=2F\left(\frac{1}{2}\right)$$

两式相加可得，

$$F'(\xi)+F'(\eta)=f'(\xi)-\xi^2+f'(\eta)-\eta^2=0$$

即

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$$

(22)【详解】(Ⅰ)由题意知，$Ax=b$ 的增广矩阵为

$$\overline{A}=(A\vdots b)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & \vdots & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \vdots & 1\\ 1 & 1 & \lambda & \vdots & 1\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\leftrightarrow}\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \vdots & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \vdots & 1\\ \lambda & 1 & 1 & \vdots & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-\lambda r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \vdots & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \vdots & a-\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \vdots & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & \vdots & a+1-\lambda\end{pmatrix}$$

$Ax=b$ 有 2 个不同的解，则

$$R(\overline{A})=R(A)<3$$

得，

$$1-\lambda^2=0,a+1-\lambda=0$$

解得

$$\lambda=1 \text{ 或 } \lambda=-1,a+1-\lambda=0$$

得，

$$a=\lambda-1$$

但 $\lambda=1$ 时 $R(A)=1<R(\overline{A})=2$，方程组 $Ax=b$ 无解

所以

$$\lambda=-1,a=\lambda-1$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

等价方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_2 = 1 \end{cases}$$

$\because R(A) = R(\overline{A}) = 2$

$\therefore$ 对应齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系含 1 个解向量，即

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Ax = b$ 的一个特解为

$$\beta = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Ax = b$ 的通解为 $k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$（其中 k 为任意常数）.

(23)【详解】设 $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 所属的特征值为 λ_1

得

$$A \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

即

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以，

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5+a \\ 4+2a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases} \lambda_1=2 \\ 2\lambda_1=5+a \\ \lambda_1=4+2a \end{cases}$$

解得，

$$\begin{cases} \lambda_1=2 \\ a=-1 \end{cases}$$

则

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix}\overset{r_3-r_1}{=}\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ -4-\lambda & 0 & \lambda+4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+c_3}{=}\begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 & -4 \\ 2 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+4 \end{vmatrix}=(\lambda+4)\begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 \\ 2 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda+4)((\lambda-2)((\lambda-5)=0$$

解得，

$$\lambda_1=2,\lambda_2=-4,\lambda_3=5$$

当 $\lambda_2=-4$ 时，

$$-4E-A=\begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 1 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -4 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+4r_1]{r_3-r_2}\begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其等价方程组为

$$\begin{cases} x_1-7x_2+x_3=0 \\ -27x_2=0 \end{cases}$$

由此得其基础解系含有 1 个解向量，即

$$\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_3=5$ 时，

$$5E-A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 5 & 1 & -4\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+4r_1]{r_2-5r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -9 & -9\\ 0 & 9 & 9\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -9 & -9\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{9}r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

其等价方程组为

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\ x_2+x_3=0\end{cases}$$

由此得其基础解系含有一个解向量，即

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

把 α_1,α_2 单位化得：

$$\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\beta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

所以

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

2009年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试题详解

(1)【答案】(C)

【详解】由 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$，则当 x 取任何整数时，$f(x)$ 均无意义.

故 $f(x)$ 的间断点有无穷多个，但可去间断点为极限存在的点，故应是 $x-x^3=0$ 的点 $x_{1,2,3}=0,\pm1$，而

$$\lim_{x\to0}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to0}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim_{x\to-1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}$$

故可去间断点为3个，即 $0,\pm1$

(2)【答案】(A)

【详解】

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2(-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos x}{-3bx^2}=\lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-\dfrac{6b}{a}.ax}=-\frac{a^3}{6b}=1$$

$a^3=-6b$ 意味选项(B)，(C)错误.

再由 $\lim\limits_{x\to0}=\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 存在，故有 $1-a\cos ax\to0(x\to0)$，故(A)=1，(D)错误，所以选(A).

(3)【答案】(D)

【详解】因 $dz=xdx+ydy$ 可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x,\frac{\partial z}{\partial y}=y$$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1, B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$$

又在(0,0)处，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0, \frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$AC-B^2=1>0$，故(0,0)为函数 $z=f(x,y)$ 的一个极小值点

(4)【答案】(C)

【详解】$\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_x^2 f(x,y)dx$ 的积分区域为两部分：

$D_1=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2, x\leqslant y\leqslant 2\}, D_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant y\leqslant 2, y\leqslant x\leqslant 4-y\}$

将其写成一块

$$D=\{(x,y)\mid 1\leqslant y\leqslant 2, 1\leqslant x\leqslant 4-y\}$$

故二重积分可以表示为 $\int_1^2 dx\int_1^{4-y} f(x,y)dx$，故答案为(C).

(5)【答案】(B)

【详解】由题意知，$f(x)$ 是一个凸函数，即 $f''(x)<0$，且在点(1,1)处的曲率

$\rho=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，而 $f'(1)=-1$，由此可得 $f''(1)=-2$

在[1,2]上，$f'(x)\leqslant f'(1)=-1<0$，即 $f(x)$ 单调减少，没有极值点.

对于 $f(2)-f(1)=f'(\zeta)<-1, \zeta\in(1,2)$，(拉格朗日中值定理)

所以 $f(2)<0$ 而 $f(1)=1>0$

由零点定理知，在[1,2]上 $f(x)$ 没有零点.故选(B)

(6)【答案】(D).

【详解】$x\in(-1,0)$ 时，$f(x)>0$ 且为常数，应有 $F(x)$ 单调递增且为直线函数.

$x\in(0,1)$ 时，$f(x)<0, F(x)\leqslant 0$，且单调递减. $x\in(1,2)$ 时，$f(x)>0, F(x)$ 单调递增. $x\in(2,3)$ 时，$f(x)=0, F(x)$ 为常值函数.正确选项为(D).

(7)【答案】(B)

【详解】由于分块矩阵 $\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$ 的行列式 $\begin{vmatrix}0A\\ B0\end{vmatrix}=(-1)^{2\times 2}|A||B|=2\times 3=6$，即分块矩阵可逆，根据公式 $C^*=|C|C^{-1}$，可得

$$\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix}0A\\ B0\end{vmatrix}\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}0 & B^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{|B|}B^*\\ \frac{1}{|A|}A* & 0\end{pmatrix}$$

$$=6\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}B^* \\ \frac{1}{2}A^* & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$$，故答案为(B).

(8)【答案】(A).

【详解】$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)E_{12}(1)$，即：

$Q=PE_{12}(1)$

$Q^TAQ=[PE_{12}(1)]^TA[PE_{12}(1)]=E_{12}^T(1)[P^TAP]E_{12}(1)$

$$=E_{12}^T(1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}E_{12}(1)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(9)【答案】$y=2x$

【详解】$\frac{dy}{dt}=2t\ln(2-t^2)-t^2.\frac{2t}{2-t^2}\Big|_{t=1}=-2$

$\frac{dx}{dt}=e^{-(1-t)^2}.(-1)\Big|_{t=1}=-1$

所以 $\frac{dy}{dx}=2$，所以切线方程为 $y=2x$

(10)【答案】-2.

【详解】$1=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{k|x|}dx=2\int_0^{+\infty}e^{kx}dx=2\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{k}e^{kx}\Big|_0^b=-\frac{2}{k}$

解得，$k=-2$.

(11)【答案】0.

【详解】$I_n=\int e^{-x}\sin nx dx=-e^{-x}\sin nx+n\int e^{-x}\cos nx dx$

$=-e^{-x}\sin nx-ne^{-x}\cos nx-n^2I_n$

所以

$$I_n=-\frac{n\cos nx+\sin nx}{n^2+1}e^{-x}+C$$

即

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx dx=\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{n\cos nx+\sin nx}{n^2+1}e^{-x}\Big|_0^1)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n\cos n+\sin n}{n^2+1}e^{-1}+\frac{n}{n^2+1}\right)=0$$

(12)【答案】-3.

【详解】对方程 $xy+e^y=x+1$ 两边关于 x 求导有

$$y+xy'+y'e^y=1\ ,$$

得

$$y'=\frac{1-y}{x+e^y}$$

对 $y+xy'+y'e^y=1$ 再次求导可得

$$2y'+xy'+y'e^y+(y')^2e^y=0\ ,$$

得

$$y''=-\frac{2y'+(y')^2e^y}{x+e^y}\ (*)$$

当 $x=0$ 时，$y=0$，$y'_{(0)}=\frac{1-0}{e^0}=1$，代入（*）得

$$y'_{(0)}=-\frac{2y'(0)+(y'(0))^2e^0}{(0+e^0)^3}=-(2+1)=-3$$

(13)【答案】$e^{-\frac{2}{e}}$.

【详解】因为 $y'=x^{2x}(2\ln x+2)$，令 $y'=0$ 的驻点为 $x=\frac{1}{e}$.

又

$$y''=x^{2x}\ (2\ln x+2)^2+x^{2x}.\frac{2}{x}\ ,$$

得

$$y''(\frac{1}{e})=2e^{-\frac{2}{e}+1}>0\ ,$$

故 $x=\frac{1}{e}$ 为 $y=x^{2x}$ 的极小值点，此时 $y=e^{-\frac{2}{e}}$ ，

又当 $x\in(0,\frac{1}{e})$ 时，

$$y'(x)<0;$$

$x\in(\frac{1}{e},1]$ 时，

$$y'(x)>0\ ,$$

故 y 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上递减，在 $(\frac{1}{e},1]$ 上递增.

而 $y(1)=1$，

$$y_{+}(0)=\lim_{x\to 0+}x^{2x}=\lim_{x\to 0+}x^{2x\ln x}=e^{\lim_{x\to 0+}\frac{2x\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x2}}}=e^{\lim_{x\to 0+}(-2x)}=1$$

所以 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为 $y(\frac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$

(14)【答案】2.

【详解】因为 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，根据相似矩阵有相同的特征值，得到 $\alpha\beta^T$ 特征值是 2，0，0，而 $\beta^T\alpha$ 是一个常数，是矩阵 $\alpha\beta^T$ 的对角元素之和，则 $\beta^T\alpha=2+0+0=2$.

(15)【详解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}=\frac{1}{4}$$

(16)【详解】令 $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=t$ 得 $x=\dfrac{1}{t^2-1}$，$dx=\dfrac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$

$$原式=\int\ln(1+t)\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt=\int\ln(1+t)\frac{-1}{(t^2-1)^2}d(t^2-1)$$

$$=\int\ln(1+t)d(\frac{1}{t^2-1})=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}.\frac{1}{t+1}dt$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int(\frac{1}{4(t-1)}+\frac{-1}{4(t+1)}+\frac{-1}{2(t+1)^2})dt=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2(t+1)}+C$$

$$=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1}-\frac{1}{2(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1)}+C$$

$$=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})+C$$

(17【详解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_1+f'_2+yf'_3$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'_1-f'_2+xf'_3$

所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(f'_1+f'_2+yf'_3)dx+(f'_1-f'_2+xf'_3)dy$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{11}.1 + f''_{12}.(-1) + f''_{13}.x + f''_{21}.1 + f''_{22}(-1) + f''_{23}.x + f'_3 + y[f''_{31}.1 + f''_{32}.(-1) + f''_{33}.x]$

$= f'_3 + f''_{11} - f''_{22} + xyf''_{33} + (x+y)f''_{13} + (x-y)f''_{23}$

(18)【详解】解微分方程 $xy'' - y' + 2 = 0$ 得其通解

$$y = C_1 + 2x + C_2 x^2 \text{，其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数}$$

又因为 $y = y(x)$ 通过原点时与实现 $x = 1$ 及 $y = 0$ 围成平面区域的面积为 2，于是可得

$$C_1 = 0$$

$$2 = \int_0^1 y(x)dx = \int_0^1 (2x + C_2 x^2)dx = (x^2 + \frac{C_2}{3}x^3)\Big|_0^1 = 1 + \frac{C_2}{3} \text{，从而 } C_2 = 3$$

于是，所求非负函数

$$y = 2x + 3x^2 (x \geqslant 0)$$

又由 $y = 2x + 3x^2$ 可得，在第一象限曲线 $y = f(x)$ 表示为

$$x = \frac{1}{3}(\sqrt{1+3y} - 1)$$

于是 D 围绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为 $V = 5\pi - V_1$，其中

$$V_1 = \int_0^5 \pi x^2 dy = \int_0^5 \pi . \frac{1}{9}(\sqrt{1+3y} - 1)dy = \frac{\pi}{9}\int_0^5 (2 + 3y - 2\sqrt{1+3y}dy = \frac{39}{18}\pi$$

$$V = 5\pi - \frac{39}{18}\pi = \frac{51}{18}\pi = \frac{17}{6}\pi$$

(19)【详解】由 $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 2$ 得

$$r \leqslant 2(\sin\theta + \cos\theta),$$

所以

$$\iint_D (x-y)dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)} (r\cos\theta - r\sin\theta)rdr$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} [\frac{1}{3}(\cos\theta - \sin\theta).r^3 \Big|_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}]d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{8}{3}(\cos\theta - \sin\theta).(\sin\theta + \cos\theta).(\sin\theta + \cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{8}{3}(\cos\theta - \sin\theta).(\sin\theta + \cos\theta)^3 d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin\theta + \cos\theta)^3 d(\sin\theta + \cos\theta) = \frac{8}{3} \times \frac{1}{4}(\sin\theta + \cos\theta)^4 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{8}{3}$$

(20)【详解】由题意,当 $-\pi<x<0$ 时,$y=-\frac{x}{}$,即

$$ydy=-xdx\ ,$$

得

$$y^2=-x^2+c\ ,$$

又 $y(-\frac{\pi}{\sqrt{2}})=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 代入 $y^2=-x^2+c$ 得 $c=\pi^2$,从而有

$$x^2+y^2=\pi^2$$

当 $0\leqslant x<\pi$ 时,$y''+y+x=0$;$y''+y=0$ 的通解为 $y'=c_1\cos x+c_2\sin x$

令解为 $y_1=Ax+b$,代入 $y''+y+x=0$,可得,

$$0+Ax+b+x=0\ ,$$

解得

$$A=-1\ ,\ b=0\ ,$$

故 $y_1=-x$,得 $y''+y+x=0$ 的通解为

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x-x$$

由于 $y=y(x)$ 是 $(-\pi,\pi)$ 内的光滑曲线,故 y 在 $x=0$ 处连续

于是由 $y(0^-)=\pm\pi$,$y(0^+)=c_1$,故 $c_1=\ \pm\pi$ 时,$y=y(x)$ 在 $x=0$ 处连续

又当 $-\pi<x<\pi$ 时,有 $2x+2yy'=0$,得

$$y'_-(0)=-\frac{x}{y}=0\ ,$$

当 $0\leqslant\pi<\pi$ 时,有 $y'=-c_1\sin x+c_2\cos x-1$,得

$$y'_+(0)=c_2-1$$

由 $y'_-(0)=y'_+(0)$ 得 $c_2-1=0$,即 $c_2=1$

故 $y=y(x)$ 的表达式为

$$y=\begin{cases}-\sqrt{\pi^2-x^2},-\pi<x<0\\-\pi\cos x+\sin x-x,0\leqslant x<\pi\end{cases}\ 或\ y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2},-\pi<x<0\\\pi\cos x+\sin x-x,0\leqslant x<\pi\end{cases},$$

又过点 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

所以

$$y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2},-\pi<x<0\\\pi\cos x+\sin x-x,0\leqslant x<\pi\end{cases}.$$

(21)【详解】(Ⅰ)过 $(a,f(a))$ 与 $(b,f(b))$ 的直线方程为

$$y(x)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

取辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\text{，则 }F(a)=F(b)\text{；}$$

$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

由罗尔定理，存在 $\zeta\in(a,b)$，使 $F'(\zeta)=0$，即

$$f'(\zeta)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\text{，或 }f(b)-f(a)=f'(\zeta)(b-a).$$

(Ⅱ)任取 $x\in(0,\delta)$，则函数 $f(x)$ 满足：在闭区间 $[0,x]$ 上连续，开区间 $(0,x_0)$ 内可导，由拉格朗日中值定理可得：$\exists\zeta\in(0,x)\subset(0,\delta)$，使得

$$f'(\zeta)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0},$$

两边取 $x\to0^+$ 时的极限，注意到 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，可得

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}f(\zeta)=A$$

于是 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$

(22)【详解】(Ⅰ)解方程 $A\zeta_2=\zeta_1$，

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

故 $\zeta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，其中 k_1 为任意常数.解方程 $A^2\zeta_3=\zeta_1$，

$$\overline{A^2}=\begin{pmatrix}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $\zeta_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，其中 k_2,k_3 为任意常数.

（Ⅱ）证明：由于

$$\begin{vmatrix}-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k_1-\frac{1}{2}-k_2\\ 1\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}k_1k_2\\ -2k_1k_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}00-\frac{1}{2}\\ 1\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}k_1k_2\\ -2k_1k_3\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}(k_1+1-k_1)=-\frac{1}{2}\neq 0.$$

故 ζ_1,ζ_2,ζ_3 线性无关.

(23)【详解】（Ⅰ）由 $A=\begin{pmatrix}a & 0 & 1\\ 0 & a & -1\\ 1 & -1 & a-1\end{pmatrix}$ 可得

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-a & \lambda-a & 0\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & 0\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 2 & \lambda-a+1\end{vmatrix}$$

$=(\lambda-a)((\lambda-a)^2+(\lambda-a)-2))=(\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+2)$.

所以二次型的矩阵 A 的特征值为 $a-2,a$ ，$a+1$.

（Ⅱ）若规范形为 $y_1^2+y_2^2$，说明有两个特征值为正，一个为 0，

当 $a=2$ 时，三个特征值为 0,2,3，二次型的规范形为 $y_1^2+y_2^2$.