2018 年全国硕士研究生入学统一考试
数学(二)试题

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(1)若 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$,则(　　)

(A) $a=\frac{1}{2}$, $b=1$　　(B) $a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$

(C) $a=\frac{1}{2}$,$b=1$　　(D) $a=-\frac{1}{2}$,$b=1$

(2)下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是(　　)

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

(C) $f(x)=\cos|x|$　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

(3)设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leqslant -1\\ x, & -1<x<0\\ x-b, & x\geq 0\end{cases}$ 若在 R 上连续,则(　　)

(A) $a=3$, $b=1$　　(B) $a=3$, $b=2$

(C) $a=-3$,$b=1$　　(D) $a=-3$,$b=2$

(4)函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,且 $\int_0^1 f(x)dx=0$,则(　　)

(A)当 $f'(x)<0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　(B)当 $f''(x)<0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

(C)当 $f'(x)>0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　(D)当 $f''(x)>0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

(5)设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}\mathrm{d}x$, $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$,则(　　)

(A) $M>N>K$　　(B) $M>K>N$

(C) $K>M>N$　　(D) $K>N>M$

(6) $\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)dy=$(　　)

(A) $\frac{5}{3}$　　(B) $\frac{5}{6}$

(C) $\frac{7}{3}$　　(D) $\frac{7}{6}$

(7)下列矩阵中,与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(8)设 A,B 为 n 阶矩阵,记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩,$(X\quad Y)$表示分块矩阵,则(　　)

(A) $r(A\quad AB)=r(A)$　　(B) $r(A\quad BA)=r(A)$

(C) $r(A\quad B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　(D) $r(A\quad B)=r(A^T\quad B^T)$

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$________

(10)曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是________

(11) $\int_{5}^{\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}dx=$________

(12)曲线 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为________

(13)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln z+e^{z-1}=xy$ 确定,则 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,\frac{1}{2})}=$________

(14)设 A 为 3 阶矩阵,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的向量组,若 $A\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$,$A\alpha_2=\alpha_2+2\alpha_3 A\alpha_3=-\alpha_2+\alpha_3$ 则 A 的实特征值为________

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请将答案写在答题纸指定位置上．

(15)(本题满分 10 分)求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^{x}-1}\,dx$

(16)(本题满分 10 分)已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^x tf(x-t)\,dt=ax^2$

(Ⅰ)求 $f(x)$

(Ⅱ)若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为 1，求 a 的值

(17)(本题满分 10 分)设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy$

(18)(本题满分 10 分)已知常数 $k\geq \ln 2-1$.证明：$(x-1)\left(x-\ln^2 x+2k\ln x-1\right)\geq 0$

(19)(本题满分 10 分)将长为 $2m$ 铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与三角形，三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求该最小值.

(20)(本题满分 11 分)已知曲线 $L:y=\frac{4}{9}x^2\,(x\geq 0)$，点 $O(0,0)$，点 $A(0,1)$.设 P 是 L 上的动点，S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围成图形的面积.若 P 运动到点 $(3,4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4，求此时关于时间 t 的变化率.

(21)(本题满分 11 分)数列 $\{x_n\}$，$x_1>0$，$x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$.证明：$\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(22)(本题满分 11 分)设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中 a 是参数，

(Ⅰ)求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解

(Ⅱ)求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形

(23)(本题满分 11 分)已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}$ 可经初等变换化为矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$

(Ⅰ)求 a

(Ⅱ)求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P

2017年全国硕士研究生入学统一考试
数学(二)试题

一、选择题(1～8题,每题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求。)

(1)若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则(　　)

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$　　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$

(C) $ab=0$　　(D) $ab=2$

(2)设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$ 且 $f''(x)>0$,则(　　)

(A) $\int_{-1}^{1}f(x)dx>0$　　(B) $\int_{-2}^{1}f(x)dx<0$

(C) $\int_{-1}^{0}f(x)dx>\int_{0}^{1}f(x)dx$　　(D) $\int_{-1}^{0}f(x)dx<\int_{0}^{1}f(x)dx$

(3)设数列 $\{x_n\}$ 收敛,则(　　)

(A)当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(B)当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(C)当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$ 时,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(D)当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(4)微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^*=$(　　)

(A) $Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$　　(B) $Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

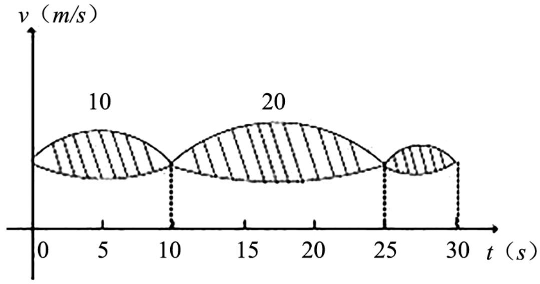
(C) $Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$　　(D) $Axe^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

(5)设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数,且对任意的 (x,y),都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0, \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$ 则(　　)

(A) $f(0,0)>f(1,1)$　　(B) $f(0,0)<f(1,1)$

(C) $f(0,1)>f(1,0)$　　(D) $f(0,1)<f(1,0)$

(6)甲,乙两人赛跑,计时开始时,甲在乙前方10(单位:m)处,图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$(单位:m/s),虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$,三块阴影部分面积的数值依次为10,20,3.计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0(单位:s),则(　　)



(A) $t_0=10$　　(B) $15<t_0<20$

(C) $t_0=25$　　(D) $t_0>25$

(7)设 A 为三阶矩阵,$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为可逆矩阵,使得 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,则

$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=$(　　)

(A) $\alpha_1+\alpha_2$　　(B) $\alpha_2+2\alpha_3$

(C) $\alpha_2+\alpha_3$　　(D) $\alpha_1+2\alpha_2$

(8)已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,则(　　)

(A) A 与 C 相似,B 与 C 相似　　(B) A 与 C 相似,B 与 C 不相似

(C) A 与 C 不相似,B 与 C 相似　　(D) A 与 C 不相似,B 与 C 不相似

二、填空题(9～14题,每题4分,共24分.请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9)曲线 $y=x(1+\arcsin\frac{2}{x})$ 的斜渐近线方程为________.

(10)设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+e^t\\y=\sin t\end{cases}$ 确定,则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=$________

(11) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx=$________

(12)设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数,且 $df(x,y)=ye^y dx+x(1+y)e^y dy$,$f(0,0)=0$,则 $f(x,y)=$________

(13) $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx =$ ________

(14)设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,则 $a =$ ________

三、解答题(15～23 题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)求 $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t}\, e^t dt}{\sqrt{x^3}}$

(16)(本题满分 10 分)设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数,

$$y = f(e^x, \cos x)$$

求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$,$\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

(17)(本题满分 10 分)　求 $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} ln(1 + \frac{k}{n})$

(18)(本题满分 10 分)已知函数 $y(x)$ 由方程

$$x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$$

确定,求 $y(x)$ 的极值

(19)(本题满分 10 分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数,

$$f(1) > 0, \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0,$$

证明:

(Ⅰ)方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0,1)$ 至少存在一个根

(Ⅱ)方程

$$f(x) f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$$

在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同的实根

(20)(本题满分 11 分)已知平面区域

$$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2y\},$$

计算二重积分 $\iint\limits_D (x+1)^2 dxdy$

(21)(本题满分 11 分)

设 $y(x)$ 是区间 $(0, \frac{3}{2})$ 内的可导函数,且 $y(1) = 0$,点 P 是曲线 $L: y = y(x)$ 上的任意

一点，L 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点 $(0,Y_P)$，法线与 x 轴相交于点 $(X_P,0)$，若 $X_p=Y_P$，求 L 上的点 (x,y) 满足的方程.

(22)(本题满分 11 分)设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$.

(Ⅰ)证明 $r(A)=2$；

(Ⅱ)若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

(23)(本题满分 11 分)设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$$

在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q.

2016 年全国硕士研究生入学统一考试
数学(二)试题

一、选择题：(1－8 题，每题 8 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.)

(1)设 $\alpha_1 = x\left(\cos\sqrt{x}-1\right)$，$\alpha_2=\sqrt{x}\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$，$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$.当 $x \to 0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是(　　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(B) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$

(C) $\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$　　(D) $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1\\ \ln x, & x\geq 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 的一个原函数是(　　)

(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x-1), & x\geq 1\end{cases}$　　(B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x+1)-1, & x\geq 1\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x+1)+1, & x\geq 1\end{cases}$　　(D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x-1)+1, & x\geq 1\end{cases}$

(3)反常积分① $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$，② $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$，的敛散性为(　　)

(A)①收敛，②收敛　　(B)①收敛，②发散

(C)①发散，②收敛　　(D)①发散，②发散

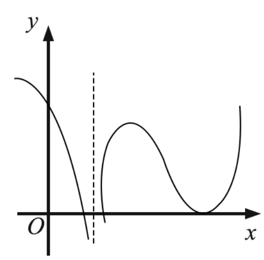
(4)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则(　　)

(A)函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

(B)函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点

(C)函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点

(D)函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点



(5)设函数 $f_i(x)\ (i=1,2)$ 具有二阶连续导数，且 $f_i''(x)<0(i=1,2)$ ，若两条曲线 $y=f_i(x)\ (i=1,2)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有公切线 $y=g(x)$ ，且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率，则在 x_0 的某个邻域内，有（　　）

(A) $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant g(x)$　　(B) $f_2(x)\leqslant f_1(x)\leqslant g(x)$

(C) $f_1(x)\leqslant g(x)\leqslant f_2(x)$　　(D) $f_2(x)\leqslant g(x)\leqslant f_1(x)$

(6)已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$ ，则（　　）

(A) $f'_x-f'_y=0$　　(B) $f'_x+f'_y=0$

(C) $f'_x-f'_y=f$　　(D) $f'_x+f'_y=f$

(7)设是可逆矩阵，且与相似，则下列结论错误的是（　　）

(A) A^T 与 B^T 相似　　(B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似

(C) $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似　　(D) $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

(8)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1,2 则（　　）

(A) $a>1$　　(B) $a<-2$

(C) $-2<a<1$　　(D) $a=1$ 或 $a=-2$

二、填空题：(9－14 题，每题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9)曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+arc\tan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为________

(10)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$________

(11)以 $y=x^2-e^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为________

(12)已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)dt$ ，则当 $n\geq 2$ 时 $f^{(n)}(0)=$________.

(13)已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与 P 间的距离为 l ，若点 P 的横坐标时间的变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时，l 对时间的变化率是________

(14)设矩阵 $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价，则 $a=$________

三、解答题:(15—23 题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$

(16)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|dt\,(x>0)$,求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

(Ⅰ)证明:反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛

(Ⅱ)若 $y(0)=1,y'(0)=1$, ,求 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 的值

(17)(本题满分 10 分)已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$$(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$$

确定,求 $z=z(x,y)$ 的极值.

(18)(本题满分 10 分)设 D 是由直线 $y=1,y=x,y=-x$ 围成的有界区域,计算二重积分

$$\iint\limits_D\frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy.$$

(19)(本题满分 10 分)已知 $y_1(x)=e^x,y_2(x)=u(x)e^x$ 是二阶微分方程

$$(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$$

的两个解,若 $u(-1)=e$, $u(0)=-1$ 求 $u(x)$,并写出该微分方程的通解.

(20)(本题满分 11 分)

设 D 是有曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 $\begin{cases}x=\cos^3 x\\ y=\sin^3 x\end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域,求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

(21)(本题满分 11 分)

已知 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上连续,在 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数, $f(0)=0$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值;

(Ⅱ)证明 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

(22)(本题满分 11 分)设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$$

且方程组 $Ax=\beta$ 无解

(Ⅰ)求 a 的值；

(Ⅱ)求方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解.

(23)(本题满分 11 分)已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(Ⅰ)求 A^{99}；

(Ⅱ)设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$.记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ ，将分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

2015年全国硕士研究生入学统一考试
数学(二)试题

一、选择题:(1—8题,每题8分,共32分,下列每题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.)

(1)下列反常积分收敛的是(　　)

(A) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$　　(B) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$

(C) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$　　(D) $\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$

(2)函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$(　　)

(A)连续　　(B)有可去间断点

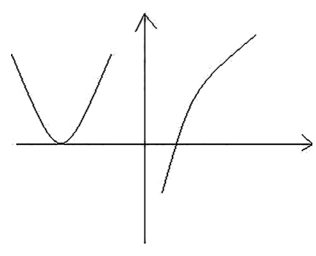
(C)有跳跃间断点　　(D)有无穷间断点

(3)设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\cos\frac{1}{x^{\beta}}, x>0\\ 0, x\leqslant 0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$,若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续,则(　　)

(A) $\alpha-\beta>1$　　(B) $0<\alpha-\beta\leqslant 1$

(C) $\alpha-\beta>2$　　(D) $0<\alpha-\beta\leqslant 2$

(4)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其2阶导函数 $f''(x)$ 的图形如右图所示,则曲线的 $y=f(x)$ 的拐点个数为(　　)



(A)0　　(B)1

(C)2　　(D)3

(5)设函数 $f(u,v)$ 满足 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$,则 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是(　　)

(A) $\frac{1}{2},0$　　(B) $0,\frac{1}{2}$

(C)$-\frac{1}{2}$,0　　(D)0,$-\frac{1}{2}$

(6)设D是第一象限中的曲线 $2xy=1$,$4xy=1$ 与直线 $y=x$,$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域,函数 $f(x,y)$ 在D上连续,则 $\iint_D f(x,y)dxdy=$(　　)

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$　　(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$　　(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

(7)设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{bmatrix}$,$b=[1\quad \alpha\quad \alpha^2]$,若集合 $\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解的充分必要条件为(　　)

(A) $a\notin\Omega,\alpha\notin\Omega$　　(B) $a\notin\Omega,\alpha\in\Omega$

(C) $a\in\Omega,\alpha\notin\Omega$　　(D) $a\in\Omega,\alpha\in\Omega$

(8)二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Py$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,其中 $P=(e_1,e_2,e_3)$,若 $Q=(e_1,-e_3,e_2)$,$f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为(　　)

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

二、填空题:(9-14 题,**每题** 4 **分,共** 24 **分,请将答案写在答题纸指定位置上.**)

(9)设 $\begin{cases}x=\arctan t\\y=3t+t^3\end{cases}$,则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=$________.

(10)函数 $f(x)=x^2\cdot2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$________.

(11)设函数 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)dt$,若 $\varphi(1)=1$,$\varphi'(1)=5$,则 $f(1)=$________.

(12)设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解,且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值3.则 $y(x)=$________.

(13)若函数 $z=z(x,y)$,有方程 $e^{x+2y+3z}+2xyz=1$ 确定,则 $dz\big|_{(0,0)}=$________.

(14)设3阶矩阵A的特征值为 $2,-2,1$,$F(x)=u(x)v(x)$,其中E为3阶矩阵,则 $|B|=$________.

三、解答题：(15—23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)设函数

$$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=kx^3,$$

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时为等价无穷小，求 a,b,k 的值.

(16)(本题满分 10 分)

设 $A>0$，D 是由曲线段 $y=A\sin x(0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2})$ 及直线 $y=0,x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域，V_1,V_2 分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转所成旋转体的体积，若 $V_1=V_2$，求 A 的值.

(17)(本题满分 10 分)已知函数 $f(x,y)$ 满足

$$f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x, f'_x(x,0)=(x+1)e^x, f(0,y)=y^2+2y,,$$

求 $f(x,y)$ 的极值.

(18)(本题满分 10 分)计算二重积分

$$\iint_D x(x+y)dxdy,$$

其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2, y\geqslant x^2\}$.

(19)(本题满分 10 分)已知函数

$$f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}\,dt,$$

求 $f(x)$ 的零点的个数.

(20)(本题满分 11 分)

已知高温物体置于低温介质中，任一时刻物体温度对时间的变化与该时刻物体和介质的温差成正比，现将一初始温度为 120℃的物体在 20℃恒温介质中冷却，30 分钟后该物体温度降至 30℃，若要该物体的温度继续降至 21℃，还需要多长时间？

(21)(本题满分 11 分)已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上具有 2 阶导数，

$$f(a)=0, f'(x)>0, f''(x)>0,$$

设 $b>a$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0,0)$，证明：$a<x_0<b$

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix},$$

且 $A^3=0$，

（Ⅰ）求 a 的值.

（Ⅱ）若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵，求 X.

(23)（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{bmatrix}$.

（Ⅰ）求 a,b 的值.

（Ⅱ）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(二)试题

一、选择题:(1—8 小题,每小题 8 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.)

(1)当 $x \to 0^+$ 时,若 $\ln^\alpha(1+2x)$,$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小,则 α 的取值范围是(　　)

(A) $(2,+\infty)$　　(B) $(1,2)$

(C) $\left(\frac{1}{2},1\right)$　　(D) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

(2)下列曲线中有渐近线的是(　　)

(A) $y=x+\sin x$　　(B) $y=x^2+\sin x$

(C) $y=x+\sin\frac{1}{x}$　　(D) $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

(3)设函数 $f(x)$ 具有二阶导数,$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$,则在区间 $[0,1]$ 上,(　　)

(A)当 $f'(x)\geq 0$ 时,$f(x)\geq g(x)$

(B)当 $f'(x)\geq 0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$

(C)当 $f''(x)\geq 0$ 时,$f(x)\geq g(x)$

(D)当 $f''(x)\geq 0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$

(4)曲线 $\begin{cases} x=t^2+7, \\ y=t^2+4t+1 \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 点处的曲率半径是(　　)

(A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$　　(B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$

(C) $10\sqrt{10}$　　(D) $5\sqrt{10}$

(5)设函数 $f(x)=\arctan x$,若 $f(x)=xf'(\xi)$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=$(　　)

(A)1　　(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{3}$

(6)设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,在 D 的内部具有二阶连续偏导数,且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,则(　　)

(A) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在区域 D 的边界上取得

(B) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在区域 D 的内部取得

(C) $u(x,y)$ 的最大值在区域 D 的内部取得,最小值在 D 的边界上取得

(D) $u(x,y)$ 的最小值在区域 D 的内部取得,最大值在 D 的边界上取得

(7)四阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$(　　)

(A) $(ad-bc)^2$　　(B) $-(ad-bc)^2$

(C) $a^2d^2-b^2c^2$　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

(8)设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为三维向量,则任意常数 k,l,向量组 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关(　　)

(A)必要非充分条件　　(B)充分非必要条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分又非必要条件

二、填空题:(9—14 **小题,每小题** 4 **分,共** 24 **分.**)

(9) $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=$________

(10)设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数,且 $f'(x)=2(x-1)$, $x\in[0,1]$,则 $f(7)=$________

(11)设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数,则 $dz\big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$________

(12)曲线 L 的极坐标方程为 $r=\theta$,则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直坐标方程为________

(13)一根长度为 1 的细棒位于 x 轴的区间[0,1]上,若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$,则该细棒的质心坐标 $\bar{x}=$________

(14)设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1,则 a 的取值范

围为________

三、解答题:(15—23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$$

(16)(本题满分 10 分)已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程

$$x^2+y^2y'=1-y',,且\ y(2)=0,$$

求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

(17)(本题满分 10 分)区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geq 0,y\geq 0\}$,计算

$$\iint_D\frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy\ .$$

(18)(本题满分 10 分)设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数,$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}\ ,$$

若 $f(0)=0$, $f'(0)=0$,求 $f(u)$ 的表达式.

(19)(本题满分 10 分)设 $f(x)$,$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)$ 单调增加,$0\leqslant g(x)\leqslant 1$,证明:

(Ⅰ)$0\leqslant\int_a^x g(t)dt\leqslant x-a,x\in[a,b]$

(Ⅱ)$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt}f(x)dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)dx$.

(20)(本题满分 11 分)设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x},x\in[0,1]$,定义函数列

$$f_1(x)=f(x),f_2(x)=f(f_1(x)),\cdots f_n(x)=f(f_{n-1}(x))\cdots,$$

记 S_n 为由曲线 $f_n(x)$,直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的图形的面积,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nS_n$.

(21)(本题满分 11 分)已知函数 $f(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$$

且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$,求曲线 $f(x,y)=0$ 所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转而成的旋转体的体积.

(22)(本题满分 11 分)设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix},$$

E 为三阶单位矩阵

(Ⅰ)求 $Ax=0$ 的一个基础解系;

(Ⅱ)求满足 $AB=E$ 的所有的矩阵 B .

(23)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & n\end{pmatrix}$ 相似.

2013年全国硕士研究生入学统一考试
数学(二)试题

一、选择题:(1—8 **小题,每小题** 8 **分,共** 32 **分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.**)

(1)设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$,其中 $|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$,则当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)$ 是(　　)

(A)比 x 高阶的无穷小　　(B)比 x 低阶的无穷小

(C)与 x 同阶但不等价的无穷　　(D)与 x 等阶的无穷小

(2)设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定,则 $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(\frac{2}{n})-1]=$(　　)

(A)2　　(B)1

(C)-1　　(D)-2

(3)设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, 0\leqslant x<\pi\\ 2, \pi\leqslant x\leqslant 2\pi\end{cases}$,$F(x)=\int_0^x f(t)dt$,则(　　)

(A) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点

(B) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点

(C) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导

(D) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导

(4)设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, 1<x<e\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, x\geq e\end{cases}$,若反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛,则(　　)

(A) $\alpha<-2$　　(B) $\alpha>2$

(C) $-2<\alpha<0$　　(D) $0<\alpha<2$

(5)设 $z=\frac{y}{x}f(xy)$,其中函数 f 可微,则,$\frac{x\partial z}{y\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$(　　)

(A) $2yf'(x,y)$　　(B) $-2yf'(x,y)$

(C) $\frac{2}{x}f(x,y)$　　(D) $-\frac{2}{x}f(x,y)$

(6)设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 在第 k 象限的部分,记

$I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy(k=1,2,3,4)$

则(　　)

(A) $I_1>0$　　(B) $I_2>0$

(C) $I_3>0$　　(D) $I_4>0$

(7)设 A,B,C 均为 n 阶矩阵,若 $AB=C$,则 B 可逆,则(　　)

(A)矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量等价

(B)矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的列向量等价

(C)矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量等价

(D)矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的列向量等价

(8)矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为(　　)

(A) $a=0,b=2$

(B) $a=0,b$ 为任意实数

(C) $a=2,b=0$

(D) $b=0,a$ 为任意实数

二、填空题:(9—14 小题,每小题 4 分,共 24 分.)

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}}=$________

(10)设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$,则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0}$ ________

(11)设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{6})$,则 L 所围平面图形的面积是________

(12)曲线 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为________

(13)已知 $y_1=e^{3x},y_2=e^x-xe^{2x},y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解,则该方程满足条件 $y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1$ 的解为 $y=$________

(14)设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵,$|A|$ 为 A 的行列式,A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式,若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$,则 $|A|=$________

三、解答题:(15—23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小,求 n 与 a 的值

(16)(本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$,直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形,v_x,v_y 分别是 D 绕 x 轴,y 轴旋转一周所得旋转体的体积,若 $v_y=10v_x$,求 a 的值.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=3y$,$y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成,计算 $\iint\limits_D x^2dxdy$

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数,且 $f(1)=1$.证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,的 $f'(\xi)=1$;

(Ⅱ)存在 $\eta\in(-1,1)$,使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

(19)(本题满分 10 分)

求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geq 0,y\geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离

(20)(本题满分 11 分)设函数

$$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$$

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的最小值

(Ⅱ)设列数 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求此极限

(21)(本题满分 11 分)设曲线 L 的方程式

$$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x(1\leqslant x\leqslant e),$$

(Ⅰ)求 L 的弧长.

(Ⅱ)设 D 是由曲线 L,直线 $x=1$,$x=e$ 及 x 轴所围平面图形,求 D 的形心的横坐标.

(22)(本题满分 11 分)设

$$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$$

当 a,b 为何值时,存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$,并求所有矩阵 C

(23)(本题满分 11 分)设二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$.

记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

(Ⅰ)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$;

(Ⅱ)若 α,β 正交且为单位向量,证明 f 在正交交换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

2012年全国硕士研究生入学统一考试
数学(二)试题

一、选择题：(1—8小题，每小题8分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.)

(1)曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线条数为(　　)

(A)0　　(B)1

(C)2　　(D)3

(2)设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中n为正整数，则 $f'(0)=$(　　)

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　(B) $(-1)^n(n-1)!$

(C) $(-1)^{n-1}n!$　　(D) $(-1)^n n!$

(3)设 $a_n>0$，$(n=1,2,\cdots)$；$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 则数列 $\{s_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的(　　)

(A)充分必要条件　　(B)充分非必要条件

(C)必要非充分条件　　(D)既非充分条件又非必要条件

(4)设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x dx$，$(k=1,2,3)$，则有(　　)

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_2<I_1$

(C) $I_2<I_3<I_1$　　(D) $I_2<I_1<I_3$

(5)设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意 x,y 都有

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0,$$

使得 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是(　　)

(A) $x_1>x_2,y_1<y_2$　　(B) $x_1>x_2,y_1>y_2$

(C) $x_1<x_2,y_1<y_2$　　(D) $x_1<x_2,y_1>y_2$

(6)设区域 D 由曲线 $y=\sin x, x=\pm\frac{\pi}{2}, y=1$ 围成,则 $\iint\limits_D (xy^2-1)dxdy=$(　　)

(A) π　　　　(B) 2

(C) -2　　　　(D) $-\pi$

(7)设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数,则下列向量组线性相关的是(　　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

(C) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

(8)设 A 为三阶矩阵, P 为三阶可逆矩阵,且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$,则 $Q^{-1}AQ=$(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　　　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

二、填空题:(9—14 **小题,每小题** 4 **分,共** 24 **分.**)

(9) $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数,则 $y''|_{x=0}=$________

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$________

(11)设 $z=f(\ln x+\frac{1}{y})$,其中函数 $f(x)$ 可微,则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$________

(12)微分方程 $ydx+(x-3y^2)dy=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为________

(13)曲线 $y=x^2+x\quad(x<0)$ 曲率为 $\sqrt{2}$ 的点的坐标为________.

(14)设 A 为三阶矩阵, $|A|=3$, A^* 为 A 的伴随矩阵,若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B,则 $|BA^*|=$________

三、解答题:(15—23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$ 记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

(Ⅰ)求 a 的值.

(Ⅱ)当 $x\to 0$ 时,$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小,求常数 K 的值.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x2+y2}{2}}$ 的极值.

(17)(本题满分 11 分)

过点(0,1)点作曲线 $L:y=\ln x$ 的切线,切点为 A ,又与 x 轴交点为 B,区域 D 由 L 与直线 AB 及 x 轴围成,求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(18)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,d\sigma$,其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 与极轴围成.

(19)(本题满分 11 分)已知函数 $f(x)$ 满足方程

$$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0 \text{ 及 } f'(x)+f(x)=2e^x$$

求

(Ⅰ) $f(x)$ 的表达式;

(Ⅱ)曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 的拐点.

(20)(本题满分 10 分)

证明:$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}, \qquad (-1<x<1)$

(21)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明:方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$,(n 为大于 1 的整数)在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根.

(Ⅱ)在(Ⅰ)中实根为 x_n ,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求此极限.

(22)(本题满分 11 分)设

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

（Ⅰ）计算 $|A|$；

（Ⅱ）当实数 a 取何值时，$Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

(23)（本题满分 11 分）已知

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix},$$

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$ 的秩为 2

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）求正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准形.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试
数学(二)试题

一、选择题:(1—8 小题,每小题 8 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.)

(1)已知当 $x \to 0$ 时,函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小,则(　　)

(A) $k=1,c=4$　　(B) $k=1,c=-4$

(C) $k=3,c=4$　　(D) $k=3,c=-4$

(2)已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}$ 等于(　　)

(A) $-2f'(0)$　　(B) $-f'(0)$

(C) $f'(0)$　　(D) 0

(3)函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为(　　)

(A) 0　　(B) 1

(C) 2　　(D) 3

(4)微分方程 $y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}(\lambda>0)$ 的特解形式为(　　)

(A) $a(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$　　(B) $ax(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$

(C) $x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$　　(D) $x^2(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$

(5)设函数 $f(x),g(x)$ 均有二阶连续导数,满足 $f(0)>0,g(0)<0$,且 $f'(0)=g'(0)=0$,则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是(　　)

(A) $f''(0)<0,g''(0)>0$　　(B) $f''(0)<0,g''(0)<0$

(C) $f''(0)>0,g''(0)>0$　　(D) $f''(0)>0,g''(0)<0$

(6)设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx,J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx,K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$,则 I,J,K 的大小关系是

(A) $I<J<K$　　(B) $I<K<J$

(C) $J<I<K$　　(D) $K<J<I$

(7)设 A 为三阶矩阵，将 A 的第二列加到第一列得到矩阵 B，再交换 B 的第二行与第三行得到单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，则 A=(　　)

(A) P_1P_2；　　(B) $P_1^{-1}P_2$；

(C) P_2P_1；　　(D) $P_2P_1^{-1}$.

(8)设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程 $AX=0$ 的一个基础解系，则 $A^*X=0$ 的基础解系可为(　　)

(A) α_1,α_2；　　(B) α_1,α_3；

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

二、填空题：(9－14 小题，每小题 4 分，共 24 分.)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$________

(10)微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$________

(11)曲线 $y=\int_0^x \tan t dt\left(0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$________

(12)设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，$\lambda>0$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=$________

(13)设平面区域 D 由直线 $y=x$ 圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所组成，则二重积分 $\iint\limits_D xyd\sigma=$

____

(14)二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，则 f 的正惯性指数为________.

三、解答题：(15－23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^a}$，设

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to 0+}F(x)=0,$$

试求 a 的取值范围.

(16)(本题满分 11 分)设函数 $y=y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3} \end{cases}$$

确定，求 $y=y(x)$ 的极值和凹凸区间及拐点.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

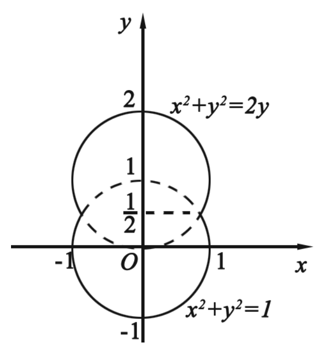
(18)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $l:y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切与原点，记 α 为曲线 l 在点 (x,y) 外切线的倾角，若 $\frac{d\alpha}{dx}=\frac{dy}{dx}$，求 $y(x)$ 的表达式.

(19)(本题满分 10 分)①证明对任意正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 成立

②设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛

(20)(本题满分 11 分)一容器内侧是由图中曲线绕 y 旋转一周而成的曲面，该曲线是由 $x^2+y^2=2y(y\geq\frac{1}{2})$ 与 $x^2+y^2=1(y\leqslant\frac{1}{2})$ 连接而成的.



(Ⅰ)容器的容积；

(Ⅱ)若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？(长度单位：m，重力加速度为 gm/s^2，水的密度为 $10^3kg/m^3$.)

(21)(本题满分 11 分)已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且

$$f(1,y)=0, f(x,1)=0, \iint_D f(x,y)dxdy=a,$$

其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，计算二重积分 $\iint_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$

(22)(本小题满分 11 分)设向量组

$$\alpha_1=(1,0,1)^T, \alpha_2=(0,1,1)^T, \alpha_3=(1,3,5)^T,$$

不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T, \beta_2=(1,2,3)^T, \beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表出.

(Ⅰ)求 a 的值.

(Ⅱ)将 β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

(23)(本小题满分 11 分)A 为三阶实对称矩阵，$r(A)=2$ 且

$$A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求 A 的特征值与特征向量.

(Ⅱ)求矩阵 A.

2010年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试题

一、选择题:(1—8小题,每小题8分,共32分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.)

(1)函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点(　　)

(A)0　　(B)1

(C)2　　(D)3

(2)设 y_1,y_2 是一阶线性齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解,若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解,$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解,则(　　)

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$　　(B) $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$　　(D) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$

(3)曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切,则 $a=$(　　)

(A)4e　　(B)3e

(C)2e　　(D)e

(4)设 m,n 是正整数,则反常积分 $\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性(　　)

(A)仅与 m 的取值有关　　(B)仅与 n 的取值有关

(C)与 m,n 的取值都有关　　(D)与 m,n 的取值都无关

(5)设函数 $z(x,y)$,由方程 $F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F'_2\neq 0$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$(　　)

(A) x　　(B) z

(C) $-x$　　(D) $-z$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$(　　)

(A) $\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

(B) $\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

(D) $\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

(7)设向量组 $I:\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 可由向量组 $II:\beta_1,\beta_2\cdots\beta_S$ 线性表示,下列命题正确的是(　　)

(A)若向量组 I 线性无关,则 $r\leqslant s$

(B)若向量组 I 线性相关,则 $r>s$

(C)若向量组 II 线性无关,则 $r\leqslant s$

(D)若向量组 II 线性相关,则 $r>s$

(8)设 A 为 4 阶实对称矩阵,且 $A^2+A=0$ 若 A 的秩为 3,则 A 相似于(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

二、填空题:(9－14 小题,每小题 4 分,共 24 分.)

(9)3 阶常系数线性齐次微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解为 $y=$________

(10)曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程________

(11)函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$________

(12)当 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时,对数螺旋 $r=e^{\theta}$ 的弧长为________

(13)已知一个长方形的长 l 以 $2cm/s$ 的速率增加,宽 w 以 $3cm/s$ 的速率增加.则当 $l=$

$12cm$，$w=5cm$ 时，它的对角线增加速率为________

(14) 设 A、B 为 3 阶方阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$，，则 $|A+B^{-1}|=$ ________

三、解答题：(15－23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t}dt$ 的单调区间与极值.

(16)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1|\ln t|t^n dt$，$n=1,2,\cdots$ 的大小，说明理由

(Ⅱ)设 $M_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n$

(17)(本题满分 11 分)设函数 $y=f(x)$ 由参数方程

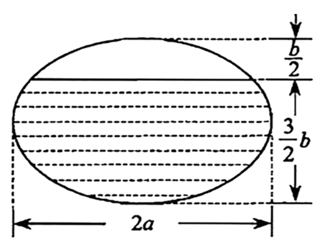
$$\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases},(t>-1)$$

所确定，其中 $\psi(t)$ 具有 2 阶导数，且

$$\psi(1)=\frac{5}{2},\psi'(1)=6,$$

已知 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1+t)}$，求函数 $\psi(t)$.

(18)(本题满分 10 分)



一个高为 l 的柱体形贮油罐，底面是长轴为 $2a$，短轴为 $2b$ 的椭圆，现将贮油罐平放，当油罐中油面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时(如图)，计算油的质量.(长度单位为 m，质量单位为 kg，油的密度为常数 $\rho kg/m^3$)

(19)(本题满分 11 分)设函数 $\mu=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式

$$4\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}=0,$$

确定 a,b 的值，使等式在变换 $\xi=x+ay$，$\eta=x+by$ 下化简为 $\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi\partial\eta}=0$

(20)(本题满分 10 分)计算二重积分

$$I=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,drd\theta,$$

其中 $D=\{(r,\theta)\left|0\leqslant r\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right.$

(21)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,在开区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$,$f(1)=\frac{1}{3}$. 证明:存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使得

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2.$$

(22)(本题满分 11 分)设

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}\qquad b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

已知线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解,

(Ⅰ)求 λ ,a ;

(Ⅱ)求方程组的 $Ax=b$ 通解.

(23)(本题满分 11 分)设

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$$

正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为正交矩阵,若 Q 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}^T$,求 a ,Q .

2009年全国硕士研究生入学统一考试
数学(二)试题

一、选择题:(1—8小题,每小题8分,共32分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.)

(1)函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为(　　)

(A)1　　(B)2

(C)3　　(D)无穷多个

(2)当 $x\to 0$ 时, $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小,则(　　)

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$

(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

(3)设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$,则点(0,0)(　　)

(A)不是 $f(x,y)$ 的连续点　　(B)不是 $f(x,y)$ 的极值点

(C)是 $f(x,y)$ 的极大值点　　(D)是 $f(x,y)$ 的极小值点

(4)设函数 $f(x,y)$ 连续,则 $\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)dx=$(　　)

(A) $\int_1^2 dx\int_1^{4-y} f(x,y)dy$　　(B) $\int_1^2 dx\int_x^{4-x} f(x,y)dy$

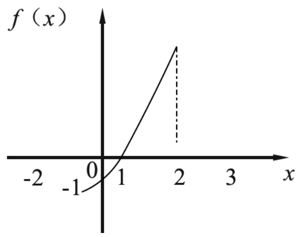
(C) $\int_1^2 dx\int_1^{4-y} f(x,y)dx$　　(D) $\int_1^2 dx\int_y^2 f(x,y)dx$

(5)若 $f''(x)$ 不变号,且曲线 $y=f(x)$ 在点(1,1)的曲率圆为 $x^2+y^2=2$,则 $f(x)$ 在区间(1,2)内(　　)

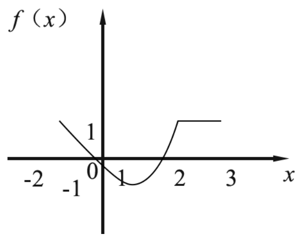
(A)有极值点,无零点　　(B)无极值点,有零点

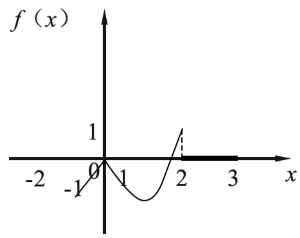
(C)有极值点,有零点　　(D)无极值点,无零点

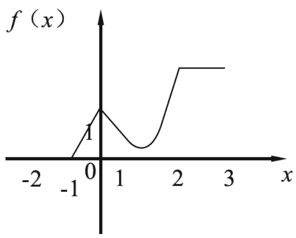
(6)设函数 $y=f(x)$ 在区间$[-1,3]$上的图形为

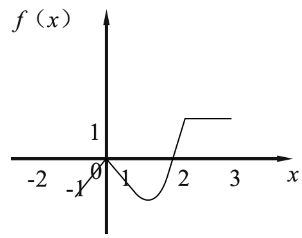


则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 为(　　)

(A)


(B)


(C)


(D)


(7)设 A、B 均为 2 阶矩阵，A^*，B^* 分别为 A、B 的伴随矩阵.若$|A|=2$，$|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$

(8)设 A，P 均为 3 阶矩阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 Q^TAQ 为(　　)

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

二、填空题：(9—14 **小题，每小题** 4 **分，共** 24 **分.**)

(9)曲线 $\begin{cases} x=\int_0^{1-t} e^{-u^2}du \\ y=t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$ 在(0,0)处的切线方程为________

(10)已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|}dx=1$，则 $k=$________

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx dx=$________

(12)设 $y=y(x)$ 是方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数，则 $\frac{dy^2}{dx^2}|_{x=0}=$________

(13)函数 $y=x^{2x}$ 在区间(0,1]上的最小值为________

(14)设 α,β 为 3 维列向量，β^T 为 β 的转置，若 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\beta^T\alpha$ =________

三、解答题：(15—23 **小题，共** 94 **分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**)

(15)(本题满分 9 分)求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$$

(16)(本题满分 10 分)计算不定积分

$$\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})dx(x>0)$$

(17)(本题满分 10 分)

设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

(18)(本题满分 10 分)

设非负函数 $y=y(x)$ $x\geq 0$，满足微分方程 $xy''-y'+2=0$，当曲线 $y=y(x)$ 过原点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域的面积为 2，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积.

(19)(本题满分10分)求二重积分

$$\iint_D (x-y)dxdy\ ,$$

其中 $D=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geq x\}$

(20)(本题满分12分)

设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 内过点 $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}})$ 的光滑曲线，当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点，当 $0\leqslant x<\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$.求 $y(x)$ 的表达式.

(21)(本题满分11分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，则存在 $\zeta\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\zeta)(b-a)\ .$$

(Ⅱ)证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=A$ 则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

(22)(本题满分11分)设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix},\zeta_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(Ⅰ)求满足 $A\zeta_2=\zeta_1, A^2\zeta_3=\zeta_1$ 的所有向量 ζ_2,ζ_3；

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任一向量 ζ_2,ζ_3，证明：ζ_1,ζ_2,ζ_3 线性无关.

(23)(本题满分11分)设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.