2018 年全国硕士研究生入学统一考试
数学(一)试题

一.选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是(　　)

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

(C) $f(x)=\cos|x|$　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

(2) 过点 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$,且与 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程为(　　)

(A) $z=0$ 与 $x+y-z=1$　　(B) $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$

(C) $y=x$ 与 $x+y-z=1$　　(D) $y=x$ 与 $2x+2y-z=2$

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=$(　　)

(A) $\sin1+\cos1$　　(B) $2\sin1+\cos1$

(C) $3\sin1+\cos1$　　(D) $3\sin1+2\cos1$

(4) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{e^x}\mathrm{d}x$, $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$,则

(A) $M>N>K$　　(B) $M>K>N$

(C) $K>M>N$　　(D) $K>N>M$

(5) 下列矩阵中,与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(6) 设 A，B 为 n 阶矩阵，记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩，$(X\ Y)$ 表示分块矩阵，则(　　)

(A) $r(A\quad AB)=r(A)$　　(B) $r(A\quad BA)=r(A)$

(C) $r(A\quad B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　(D) $r(A\quad B)=r(A^T\quad B^T)$

(7) 随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$，则 $P(X<0)=$ ________

(A) 0.2　　(B) 0.3

(C) 0.4　　(D) 0.5

(8) 给定总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，给定样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，对总体均值 μ 进行检验，令 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，则

(A) 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时拒绝 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时也拒绝 H_0.

(B) 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时拒绝 H_0.

(C) 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时拒绝 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时接受 H_0.

(D) 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时也接受 H_0.

二.填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$，则 $k=$ ________

(10) $y=f(x)$ 的图像过(0,0)，且与 $y=a^x$ 相切于(1,2)，则 $\int_0^1 xf''(x)dx=$ ________

(11) $F(x,y,z)=xy\vec{\varepsilon}-yz\vec{\eta}+xz\vec{k}$，求 $rot\vec{F}(1,1,0)=$ ________

(12) 曲线 S 由 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x+y+z=0$ 相交而成，求 $\oint xydS=$ ________

(13) 二阶矩阵 A 有两个不同特征值，α_1,α_2 是 A 的线性无关的特征向量，$A^2(\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1+\alpha_2)$，则 $|A|=$ ________

(14) A，B 独立，A，C 独立，$BC\neq\phi$，$P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(AC|AB\cup C)=\dfrac{1}{4}$，则 $P(C)=$

三.解答题：15~23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.请将答案写在答题纸指定位置上.

(15)（本题满分 10 分）求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,dx$

(16)（本题满分 10 分）将长为 $2m$ 铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与三角形，三个图

形的面积之和是否存在最小值？若存在，求该最小值.

(17)（本题满分 10 分）设 Σ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 取正面，求 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+(y^3+z)dxdz+z^3dxdy$

(18)（本题满分 10 分）微分方程 $y'+y=f(x)$

(I) 当 $f(x)=x$ 时，求微分方程的通解.

(II) 当 $f(x)$ 为周期函数时，证明微分方程有通解与其对应，且该通解也为周期函数.

(19)（本题满分 10 分）数列 $\{x_n\}$，$x_1>0$，$x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$. 证明：$\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(20)（本题满分 11 分）设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中 a 是参数，

(I) 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解　　(II) 求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形

(21)（本题满分 11 分）已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}$ 可经初等变换化为矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$

(I) 求 a　　(II) 求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P

(22)（本题满分 11 分）随机变量 x,y 相互独立，$P\{X=1\}=y_1$，$P\{X=-1\}=y_2$，Y 服从 λ 的泊松分布 $Z=XY$

(I) 求 $\mathrm{cov}(X,Z)$.　　(II) 求 Z 得概率分布.

(23)（本题满分 11 分）$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自总体 X 的分布，$f(x)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$（$\sigma$ 未知，$-\infty<x<+\infty$）.

(I) 求 σ 得极大似然估计 $\hat{\theta}^2$.　　(II) 求 $E(\hat{\theta}^2)$，$D(\hat{\theta}^2)$.

2017年全国硕士研究生入学统一考试
数学(一)试题

一、选择题(1 ~ 8题,每题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求.)

(1) 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则(　　)

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$　　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$

(C) $ab=0$　　(D) $ab=2$

(2) 设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(x)f'(x)>0$,则(　　)

(A) $f(1)>f(-1)$　　(B) $f(1)<f(-1)$

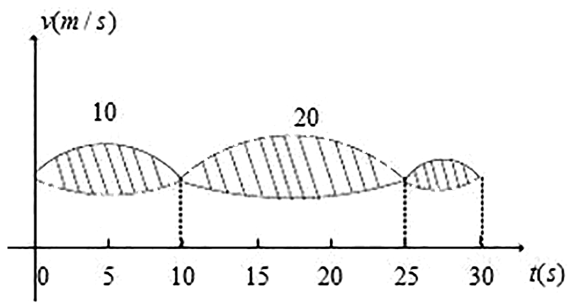
(C) $|f(1)|>|f(-1)|$　　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$

(3) 函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $\vec{u}=(1,2,2)$ 的方向导数为(　　)

(A) 12　　(B) 6

(C) 4　　(D) 2

(4) 甲,乙两人赛跑,计时开始时,甲在乙前方10(单位:m)处,图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$ (单位:m/s),虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$,三块阴影部分面积的数值依次为10,20,3.计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0(单位:s),则(　　)



(A) $t_0 = 10$　　(B) $15 < t_0 < 20$

(C) $t_0 = 25$　　(D) $t_0 > 25$

(5) 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵,则(　　)

(A) $E - \alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　(B) $E + \alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆

(C) $E + 2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　(D) $E - 2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆

(6) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,则(　　)

(A) A 与 C 相似, B 与 C 相似　　(B) A 与 C 相似, B 与 C 不相似

(C) A 与 C 不相似, B 与 C 相似　　(D) A 与 C 不相似, B 与 C 不相似

(7) 设 A,B 为随机事件,若 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$,则 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$ 的充分必要条件是(　　)

(A) $P(B|A) > P(B|\bar{A})$　　(B) $P(B|A) < P(B|\bar{A})$

(C) $\mathrm{P}(\bar{B}|A) > \mathrm{P}(B|\bar{A})$　　(D) $\mathrm{P}(\bar{B}|A) < \mathrm{P}(B|\bar{A})$

(8) 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n (n \geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本,记 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ 则下列结论正确的是(　　)

(A) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$ 服从 x^2 分布　　(B) $2(x_n - x_1)^2$ 服从 x^2 分布

(C) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2$ 服从 x^2 分布　　(D) $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 x^2 分布

二、填空题(9~14 题,每题 4 分,共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$,则 $f^{(3)}(0) =$ ________

(10) 微分方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解为 $y =$ ________

(11) 若曲线积分 $\int_L \frac{xdx - aydy}{x^2 + y^2 - 1}$ 在区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 内与路径无关,则 $a =$ ________

(12) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n x^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x) =$ ________

(13) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, α_1、α_2、α_3 为线性无关的 3 维列向量组. 则

$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)$ 的秩为 ________

(14) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$,其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数,则 $EX=$ ________

三、解答题(15~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数, $y=f(e^x,\cos x)$,求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

(16)(本题满分 10 分) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}ln(1+\frac{k}{n})$

(17)(本题满分 10 分)已知函数 $y(x)$ 由方程

$$x^3+y^3-3x+3y-2=0$$

确定,求 $y(x)$ 的极值

(18)(本题满分 10 分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数,

$$f(1)>0,\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$$

证明:

(I)方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 至少存在一个根

(II)方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同的实根

(19)(本题满分 10 分)设薄片型物体 S 是圆锥面 $Z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $Z^2=2x$ 割下的有限部分,其上任一点弧度为 $u(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.记圆锥与柱面的交线为 C

(I)求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程

(II)求 S 的质量 M

(20)(本题满分 11 分) 设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值,且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$.

(I)证明 $r(A)=2$;

(II)若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$,求方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$$

在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$,求 a 的值及一个正交矩阵 Q .

(22)(本题满分 11 分)设随机变量 X , Y 相互独立,且 X 的概率分布为

$$P(X=0)=P(X=2)=\frac{1}{2},$$

Y 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(Ⅰ)求 $P(Y\leqslant EY)$；

(Ⅱ)求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

(23)（本题满分 11 分）

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots n)$ ，利用 $Z_1,Z_2,\cdots Z_n$ 估计 σ .

(Ⅰ)求 Z_i 的概率密度；

(Ⅱ)利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

(Ⅲ)求 σ 的最大似然估计量.

2016 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(一)试题

一、选择题:(1-8 题,每题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.)

(1) 若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛,则(　　)

(A) $a<1$ 且 $b>1$　　(B) $a>1$ 且 $b>1$

(C) $a<1$ 且 $a+b>1$　　(D) $a>1$ 且 $a+b>1$

(2) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1),x<1\\ \ln x,\ x\geqslant 1\end{cases}$,则 $f(x)$ 的一个原函数是(　　)

(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,\ x<1\\ x(\ln x-1),\ x\geqslant 1\end{cases}$　　(B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,\ x<1\\ x(\ln x+1)-1,\ x\geqslant 1\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,\ x<1\\ x(\ln x+1)+1,\ x\geqslant 1\end{cases}$　　(D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,\ x<1\\ x(\ln x-1)+1,\ x\geqslant 1\end{cases}$

(3) 若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$,$y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解,则 $q(x)=$(　　)

(A) $3x(1+x^2)$　　(B) $-3x(1+x^2)$

(C) $\frac{x}{1+x^2}$　　(D) $-\frac{x}{1+x^2}$

(4) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n},n=1,2,\cdots\end{cases}$,则(　　)

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点　　(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导　　(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

(5) 设 A,B 是可逆矩阵,且 A 与 B 相似,则下列结论错误的是(　　)

(A) A^T 与 B^T 相似　　(B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似

(C) $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似　　(D) $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

(6) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为(　　)

(A)单叶双曲面　　(B)双叶双曲面

(C)椭球面　　(D)柱面

(7) 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$，记 $P=P\{X\leqslant\mu+\sigma^2\}$，则(　　)

(A) p 随着 μ 的增加而增加　　(B) p 随着 σ 的增加而增加

(C) p 随着 μ 的增加而减少　　(D) p 随着 σ 的增加而减少

(8) 随机实验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3，且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$，将试验 E 独立重复进行 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为(　　)

(A) $-\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{3}$

二、填空题:(9-14 题，每题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,dt}{1-\cos x^2}=$ ________

(10) 向量场 $\vec{A}(x,y,z)=(x+y+z)\vec{i}+xy\vec{j}+z\vec{k}$ 的旋度 $rot\vec{A}=$ ________

(11) 设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz|_{(0,1)}=$ ________

(12) 设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$ ________

(13) 行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$ ________

(14) 设 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\bar{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信度上限为 10.8，则的置信度为 0.95 的双侧置信区间为________

三、解答题:(15-23 题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)已知平面区域

$$D=\left\{(r,\theta)\ \middle|\ 2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta),\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

计算二重积分 $\iint\limits_D x dxdy$

(16)(本题满分 10 分)设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$,其中 $0<k<1$

(I)证明:反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)\,dx$ 收敛　(II)若 $y(0)=1,y'(0)=1$,求 $\int_0^{+\infty}y(x)\,dx$ 的值

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x,y)$ 满足方程 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$,且 $f(0,y)=y+1$, L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线,计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$,并求 $I(t)$ 的最小值.

(18)(本题满分 10 分)设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成, Σ 为 Ω 整个表面的外侧,计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\,dydz-2ydzdx+3zdxdy.$$

(19)(本题满分 10 分)已知函数 $f(x)$ 可导,且 $f(0)=1,0<f'(x)<\frac{1}{2}$,

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ 证明:

(I)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛　(II) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$ 且方程组 $Ax=\beta$ 无解

(I)求 a 的值　(II)求方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解

(21)(本题满分 11 分)已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

(I)求 A^{99}

(II)设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$.记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,将 β_1,β_2,β_3 分别表

示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合

(22)（本题满分 11 分）设随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 服从均匀分布，令 $U=\begin{cases}1,X\leq Y\\0,X>Y\end{cases}$

(I)写出 (X,Y) 的概率密度；

(II)问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

(III)求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(Z)$.

(23)（本题满分 11 分）设总体的概率密度为

$$f(x,\theta)==\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

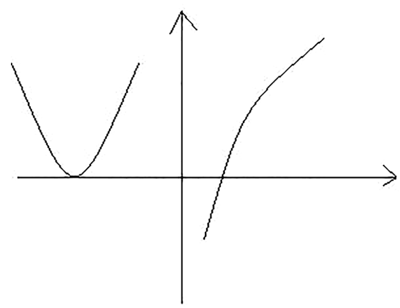
其中为未知参数，为来自总体的简单随机样本，令 $T=\max(X_1,X_2,\cdots,X_5)$

(I)求 T 的概率密度；　　(II)确定 a，使得 aT 为 θ 的无偏估计.

2015年全国硕士研究生入学统一考试
数学(一)试题

一、选择题:(1-8题,每题8分,共32分,下列每题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.)

(1)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其2阶导函数 $f''(x)$ 的图形如右图所示,则曲线的 $y=f(x)$ 的拐点个数为(　　)



(A)0

(B)1

(C)2

(D)3

(2)设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解,则　(　　)

(A) $a=-3,b=2,c=-1$　　(B) $a=3,b=2,c=-1$

(C) $a=-3,b=2,c=1$　　(D) $a=3,b=2,c=1$

(3)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的(　　)

(A)收敛点,收敛点　　(B)收敛点,发散点

(C)发散点,收敛点　　(D)发散点,发散点

(4)设D是第一象限中的曲线 $2xy=1,4xy=1$ 与直线 $y=x,y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域,函数 $f(x,y)$ 在D上连续,则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$(　　)

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdr$　　(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,dr$　　(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,dr$

(5) 设矩阵A,若集合$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1\\a\\a^2\end{pmatrix}$,则线性方程组$\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组$Ax=b$有无穷多解的充分必要条件为(　　)

(A) $a\notin\Omega,\alpha\notin\Omega$　　(B) $a\notin\Omega,\alpha\in\Omega$

(C) $a\in\Omega,\alpha\notin\Omega$　　(D) $a\in\Omega,\alpha\in\Omega$

(6) 二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$x=Py$下的标准形为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,其中$P=(e_1,e_2,e_3)$,若$Q=(e_1,-e_3,e_2)$,$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$x=Qy$下的标准型为(　　)

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

(7) 若A,B为任意两个随机事件,则 (　　)

(A) $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$　　(B) $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$

(C) $P(AB)\leqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}$　　(D) $P(AB)\geqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}$

(8) 设随机变量X,Y不相关,且$EX=2,EY=1,DX=3$,则$E[X(X+Y-2)]=$(　　)

(A) -3　　(B) 3

(C) -5　　(D) 5

二、填空题:(9-14 题,每题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=$________.

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)dx=$________.

(11) 若函数$z=z(x,y)$有方程$e^z+xyz+x+\cos x=2$确定,则$dz|_{(0,1)}=$________.

(12) 设Ω是由$x+y+z=1$与三个坐标平面所围成的空间区域,则$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,dxdydz=$________.

(13) n阶行列式$\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=$________

(14) 设二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(1,0;1,1;0)$,则

$P\{XY-Y<0\}=$ ________

三、解答题:(15-23 题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)设函数

$$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x,g(x)=kx^3,$$

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时为等价无穷小,求 a,b,k 的值.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于 0,若对任意的 $x_0\in I$,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4,且 $f(0)=2$,求 $f(x)$ 的表达式.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$, 曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$, 求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)设函数 $u(x),v(x)$ 可导,利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

(Ⅱ)设函数 $u_1(x),u_2(x),\dots,u_n(x)$ 可导,$f(x)=u_1(x),u_2(x),\dots,u_n(x)$,写出 $f(x)$ 的求导公式.

(19)(本题满分 10 分)已知曲线 L 的方程为

$$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$$

起点为 $A(0,\sqrt{2},0)$,终点为 $B(0,-\sqrt{2},0)$, 计算曲线积分

$$I=\int_L (y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+(x^2+y^2)dz$$

(20)(本题满分 11 分)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一个基,

$$\beta_1=2\alpha_1+2k\alpha_3,\beta_2=2\alpha_2,\beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3,$$

(Ⅰ)证明 β_1,β_2,β_3 为 R^3 的一个基;

(Ⅱ)当 k 为何值时,存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与基 β_1,β_2,β_3 下的坐标相同,并求所有的 ξ.

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$.

(Ⅰ)求 a,b 的值.　　(Ⅱ)求可逆矩阵 P ,使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(22)(本题满分 11 分)设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2 & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases},$$

对 X 进行独立重复的观测,直到第 2 个大于 3 的观测值出现为止,记 Y 为观测次数.

(Ⅰ)求 Y 的概率分布.　　(Ⅱ)求 EY .

(23)(本题满分 11 分)设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta} & \theta\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases},$$

其中 θ 为未知参数, $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为随机样本.

(Ⅰ)求 θ 的矩阵估计量;　　(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试
数学(一)试题

一、选择题:(1-8 题,每题 8 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.)

(1) 下列曲线中有渐近线的是(　　)

(A) $y = x + \sin x$　　(B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$　　(D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

(2) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1 - x) + f(1)x$, 则在区间 $[0,1]$ 上(　　)

(A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$　　(B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

(C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$　　(D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

(3) 设 $f(x,y)$ 为连续函数,则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx = $(　　)

(A) $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$

(B) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)\,dy$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr$

(4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1\cos x - b_1\sin x)^2 dx = \min\limits_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2 dx\right\}$, 则 $a_1\cos x + b_1\sin x = $(　　)

(A) $2\sin x$　　(B) $2\cos x$

(C) $2\pi\sin x$　　(D) $2\pi\cos x$

(5) 四阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = (\quad)$

(A) $(ad-bc)^2$　　(B) $-(ad-bc)^2$

(C) $a^2d^2-b^2c^2$　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

(6) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为三维向量,则任意常数 k,l,向量组 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关(　　)

(A) 必要非充分条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立,且 $P(B)=0.5$, $P(A-B)=0.3$,则 $P(B-A)=(\quad)$

(A) 0.1　　(B) 0.2

(C) 0.3　　(D) 0.4

(8) 设连续型随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且均存在方差, X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$,随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$,随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$,则

(A) $EY_1>EY_2,DY_1>DY_2$　　(B) $EY_1=EY_2,DY_1=DY_2$

(C) $EY_1=EY_2,DY_1<DY_2$　　(D) $EY_1=EY_2,DY_1>DY_2$

二、填空题:(9-14 题,每题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处切平面方程为________

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数,且 $f'(x)=2(x-1)$, $x\in[0,2]$,则 $f(7)=$________

(11) 微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=e^3$ 的解为 $y=$________

(12) 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线,从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向,则曲线积分 $\oint_L zdx+ydz=$________

(13) 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1,则 a 的取值范围为________.

(14) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2},\theta<x<2\theta,\\ \theta,其他\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机变量,若 $c\sum_{i=1}^{\infty}X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计量,则 $c=$ ________

三、解答题:(15-23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$

(16)(本题满分 10 分)设函数 $y=f(x)$ 由方程

$$y^3+xy^2+x^2y+6=0$$

确定,求 $y=f(x)$ 的极值

(17)(本题满分 10 分)设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数, $z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x},$$

若 $f(0)=0,f'(0)=0$,求 $f(u)$ 的表达式.

(18)(本题满分 10 分)设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$ 的上侧,计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$$

(19)(本题满分 10 分)设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足

$$0<a_n<\frac{\pi}{2},0<b_n<\frac{\pi}{2},\cos a_n-a_n=\cos b_n,$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛

(Ⅰ)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;　　(Ⅱ)证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛

(20)(本题满分 11 分)设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix},$$

E 为三阶单位矩阵

（Ⅰ）求 $Ax=0$ 的一个基础解系；（Ⅱ）求满足 $AB=E$ 的所有的矩阵 B.

（21）（本题满分 11 分）

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$ 相似.

（22）（本题满分 11 分）设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2},$$

在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)\ (i=1,2)$ ，

（Ⅰ）求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ ；　　　　（Ⅱ）求 $E(Y)$.

（23）（本题满分 11 分）设总体 X 的分布函数

$$F(x,\theta)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, x \geqslant 0 \\ 0, x<0 \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的简单随机样本

（Ⅰ）求 EX 与 EX^2；

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$；

（Ⅲ）是否存在实数 a，使得对任何 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}-a|\geqslant\varepsilon)=0$?

2013 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(一)试题

一、选择题:(1-8 小题,每小题 8 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.)

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$,其中 k,c 为常数,且 $c\neq0$,则(　　)

(A) $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$ (B) $k=2,c=\dfrac{1}{2}$

(C) $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$ (D) $k=3,c=\dfrac{1}{3}$

(2) 曲面 $x^2+cos(xy)+yz+x=0$ 在点$(0,1,-1)$的切平面方程为(　　).

(A) $x-y+z=2$　　(B) $x+y+z=0$

(C) $x-2y+z=-3$　　(D) $x-y-z=0$

(3) 设$f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$,$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n x dx$ $(n=1,2,\cdots)$,令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$. 则 $S(-\dfrac{9}{4})=$(　　)

(A) $\dfrac{3}{4}$　　(B) $\dfrac{1}{4}$

(C) $-\dfrac{1}{4}$　　(D) $-\dfrac{3}{4}$

(4) 设 $L_1:x^2+y^2=1$,$L_2:x^2+y^2=2$,$L_3:x^2+2y^2=2$,$L_4:2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线,记

$$I_i=\oint_{L_i}(y+\frac{y^3}{6})dx+(2x-\frac{x^3}{3})dy\ (i=1,2,3,4).$$

则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$(　　).

(A) I_1　　(B) I_2

(C) I_3　　(D) I_4

(5) 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵,若 $AB=C$. 则 B 可逆,则(　　)

(A)矩阵 C 行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

(B)矩阵 C 行向量组与矩阵 A 的列向量组等价

(C)矩阵 C 行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

(D)矩阵 C 行向量组与 矩阵 B 的列向量组等价

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充要条件(　　).

(A) $a=0,b=2$　　(B) $a=0,b$ 任意常数

(C) $a=2,b=0$　　(D) $b=0,a$ 任意常数

(7) 设 X_1,X_2,X_3 是随机变量,且 $X_1 \sim N(0,1),X_2 \sim N(0,2^2),X_3 \sim N(5,3^2)$, $P(-2 \leqslant X_i \leqslant 2)=P_i,(i=1,2,3)$ 则(　　).

(A) $p_1 > p_2 > p_3$　　(B) $p_2 > p_1 > p_3$

(C) $p_3 > p_1 > p_2$　　(D) $p_1 > p_3 > p_2$

(8) 设随机变量 $X \sim t(n)$, $Y \sim F(1,n)$,给定 α,$(0 < \alpha < 0.5)$,常数 c 满足 $P(X > c)=\alpha$,则 $P\{Y>c^2\}=$(　　)

(A) α　　(B) $1-\alpha$

(C) 2α　　(D) $1-2\alpha$

二、填空题:(9-14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定,则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f(\frac{1}{n})-1\right]=$ ________.

(10) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$,$y_2=e^x-xe^{2x}$,$y_3=-xe^2x$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解,则该方程的通解为 $y=$ ________.

(11) 设 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$ (t 为常数),则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ ________.

(12) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)} dx=$ ________.

(13) 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$,则 $|A|=$ ________.

(14) 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, a 为常数且大于零, 则 $P\{Y \leqslant a+1 \mid Y > a\} =$ ________.

三、解答题:(15-23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$,其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}dt$

(16)(本题满分 10 分)设数列 $\{a_n\}$ 满足条件:

$$a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geqslant 2),$$

$S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ 的和函数

(Ⅰ)证明:$S''(x) - S(x) = 0$

(Ⅱ)求 $S(x)$ 的表达式

(17)(本题满分 10 分)求函数 $f(x,y) = (y + \frac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值

(18)(本题满分 10 分)设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数,且 $f(x) = 1$,证明:

(I)存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $f'(\xi) = 1$.

(II)存在 $\eta \in (-1,1)$,使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

(19)(本题满分 10 分)

设直线 L 过 A(1,0,0),B(0,1,1)两点,将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 $\sum$, $\sum$ 与 $z = 0, z = 2$ 所围成的立体为 Ω ;

(I)求曲面 $\sum$ 的方程; (II)求 Ω 的形心坐标.

(20)(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a,b 为何值时,存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$,并求所有矩阵 C.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2.$$

记 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

(Ⅰ)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；

(Ⅱ)若 α，β 正交且为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 令随机变量 $Y=\begin{cases}2, X\leq 1\\ X, 1<X<2\\ 1, X\geq 2\end{cases}$

求(Ⅰ) Y 的分布函数.

(Ⅱ)概率 $P\{X\leq Y\}$

(23)(本题满分 11 分)设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.求：

(Ⅰ)求 θ 的矩估计量

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量

2012 年全国硕士研究生入学统一考试
数学(一)试题

一、选择题:(1-8 小题,每小题 8 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.)

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线条数为(　　)

(A)0　　　　(B)1

(C)2　　　　(D)3

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$(　　)

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　　　(B) $(-1)^n(n-1)!$

(C) $(-1)^{n-1}n!$　　　　(D) $(-1)^n n!$

(3) 如果函数 $f(x,y)$ 在(0,0)处连续,那么下列命题正确的是(　　)

(A) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微

(C)若 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微,则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

(D)若 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微,则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

(4) 设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x dx$, $(k=1,2,3)$,则有(　　)

(A) $I_1<I_2<I_3$　　　　(B) $I_3<I_2<I_1$

(C) $I_2<I_3<I_1$　　　　(D) $I_2<I_1<I_3$

(5) 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数,则下

列向量组线性相关的是(　　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

(C) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

(6) 设 A 为三阶矩阵，P 为三阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $Q^{-1}AQ=$(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 和参数为 4 的指数分布，则 $P(X<Y)=$(　　)

(A) $\frac{1}{5}$　　(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{2}{5}$　　(D) $\frac{4}{5}$

(8) 将长度为 1 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为(　　)

(A) 1　　(B) $\frac{1}{2}$

(C) $-\frac{1}{2}$　　(D) -1

二、填空题：(9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$ ________

(10) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=$ ________.

(11) $grad\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$ ________

(12) 设 $\Sigma=\{(x,y,z)\,|\,x+y+z=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS=$ ________

(13) 设 α 为三维单位向量，E 为三阶单位矩阵，则 $E-\alpha\alpha^T$ 的秩为________.

(14) 设 A,B,C 为三个随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB)=\frac{1}{2}$,$P(C)=\frac{1}{3}$, 则 $P(AB|\bar{C})=$ ________

三、解答题:(15-23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

证明: $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}$, $\quad(-1<x<1)$

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

(18)(本题满分 10 分)已知曲线 L:

$$\begin{cases}x=f(t)\\ y=\cos t\end{cases}\ \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

其中函数 $f(t)$ 具有连续导数,且 $f(0)=0,f'(t)>0\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$,若曲线 L 的切线与 x 轴交点到切点的距离恒为 1,求函数 $f(t)$ 的表达式,并求此曲线 L 与 x 轴与 y 轴围成无边界的区域的面积.

(19)(本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 (0,0) 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 (2,0) ,再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 (0,2) 的曲线段,计算曲线积分 $J=\int_l 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$.

(20)(本题满分 11 分)设

$$A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

(I)计算 $|A|$;

(II)当实数 a 取何值时, $Ax=\beta$ 有无穷多解,并求其通解.

(21)(本题满分 11 分)已知

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix},$$

二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$的秩为2

(I)求实数a的值;

(II)求正交变换$x=Qy$将f化为标准形.

(22)(本题满分11分)设二维离散型随机变量X与Y的概率分布为

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

求:(I) $P(X=2Y)$

(II) $\mathrm{cov}(X-Y,Y)$ 与 ρ_{XY}

(23)(本题满分11分)

设随机变量X与Y相互独立且分别服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$与$N(\mu,2\sigma^2)$,其中σ是未知参数且$\sigma>0$.设$Z=X-Y$

(I)求Z的概率密度$f_Z(z)$;

(II)设$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$为来自总体Z的简单随机样本,求σ^2的最大似然估计量$\hat{\sigma}^2$;

(III)证明σ^2为$\hat{\sigma}^2$的无偏估计量.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试
数学(一)试题

一、选择题:(1-8 小题,每小题 8 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.)

(1) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的一个拐点是(　　)

(A) $(1,0)$　　(B) $(2,0)$

(C) $(3,0)$　　(D) $(4,0)$

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,\cdots)$ 无界,则幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(x-1)^k$ 的收敛域是(　　)

(A) $(-1,1]$　　(B) $[-1,1)$

(C) $[0,2)$　　(D) $(0,2]$

(3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数,且 $f(x)>0, f'(0)=0$, 则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是(　　)

(A) $f(0)>1, f''(0)>0$　　(B) $f(0)>1, f''(0)<0$

(C) $f(0)<1, f''(0)>0$　　(D) $f(0)<1, f''(0)<0$

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x dx, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x dx, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx$,则 I,J,K 的大小关系是

(A) $I<J<K$　　(B) $I<K<J$

(C) $J<I<K$　　(D) $K<J<I$

(5) 设 A 为三阶矩阵,将 A 的第二列加到第一列得到矩阵 B,再交换 B 的第二行与第三行得到单位矩阵,记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则 A=(　　)

(A) P_1P_2　　(B) $P_1^{-1}P_2$

(C) P_2P_1　　(D) $P_2P_1^{-1}$

(6) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是4阶矩阵,A''为 A 的伴随矩阵若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程 $AX=0$ 的一个基础解系,则 $A^*X=0$ 的基础解系可为(　　)

(A) α_1,α_2　　(B) α_1,α_3

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

(7) 设 $F_1(x),F_2(x)$ 为两个分布函数,其相应的概率密度 $f_1(x),f_2(x)$ 是连续函数,则必为概率密度的是(　　)

(A) $f_1(x)f_2(x)$　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$

(C) $f_1(x)F_2(x)$　　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 EX 与 EY 存在.记 $U=\max\{X,Y\}$,$V=\min\{X,Y\}$ 则 $E(UV)$ 等于(　　)

(A) $EU\cdot EV$　　(B) $EX\cdot EY$

(C) $EU\cdot EY$　　(D) $EX\cdot EV$

二、填空题:(9-14小题,每小题4分,共24分,请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 曲线 $y=\int_0^x \tan t dt(0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{4})$ 的弧长 $s=$ ________

(10) 微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$ ________

(11) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$,则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\big|_{x=0,y=2}=$ ________

(12) 设 L 是柱面方程 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线,从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向,则曲线积分 $\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$ ________

(13) 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$,经过正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$,则 $a=$ ________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从 $N(\mu,\mu;\sigma^2;\sigma^2,0)$,则 $E(XY^2)=$ ________ .

三、解答题:(15-23小题,共94分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分10分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$

(16) (本题满分10分)设函数 $z=f(xy,yg(x))$,其中函数 f 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(17)(本题满分 10 分)求方程 $k\arctan x - x = 0$ 不同实根的个数,其中 k 为参数

(18)(本题满分 10 分)①证明对任意正整数 n,都有 $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ 成立

②设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$,证明数列 $\{a_n\}$ 收敛

(19)(本题满分 11 分)已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0$, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = a$, 其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$,计算二重积分 $\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$

(20)(本小题满分 11 分)设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T, \alpha_2=(0,1,1)^T, \alpha_3=(1,3,5)^T$,不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T, \beta_2=(1,2,3)^T, \beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表出.

(I)求 a 的值.

(II)将 β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

(21)(本小题满分 11 分)A 为三阶实对称矩阵,$r(A)=2$ 且 $A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

(I)求 A 的特征值与特征向量.

(II)求矩阵 A.

(22)(本题满分 11 分)设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P(X^2=Y^2)=1$.

(Ⅰ)求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ)求 $Z=XY$ 的概率分布;

(Ⅲ)求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 11 分)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本,其中 μ_0 已知,$\sigma^2>0$ 未知. $\bar{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(Ⅰ)求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$;

(Ⅱ)计算 $E\hat{\sigma}^2$ 和 $D\hat{\sigma}^2$.

2010 年全国硕士研究生入学统一考试
数学(一)试题

一、选择题:(1-8 小题,每小题 8 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$ (　　)

(A) 1　　　　(B) e

(C) e^{a-b}　　　　(D) e^{b-a}

(2) 设函数 $z=z(x,y)$,由方程 $F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F'_2\neq 0$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ (　　)

(A) x　　　　(B) z

(C) $-x$　　　　(D) $-z$

(3) 设 m,n 是正整数,则反常积分 $\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性(　　)

(A) 仅与 m 的取值有关　　　　(B) 仅与 n 的取值有关

(C) 与 m,n 的取值都有关　　　　(D) 与 m,n 的取值都无关

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$ (　　)

(A) $\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　　　　(B) $\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

(C) $\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　　　　(D) $\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

(5) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵,若 $AB=E$,则(　　)

(A) 秩 $r(A)=m$, 秩 $r(B)=m$　　　　(B) 秩 $r(A)=m$, 秩 $r(B)=n$

(C) 秩 $r(A)=n$, 秩 $r(B)=m$　　　　(D) 秩 $r(A)=n$, 秩 $r(B)=n$

(6) 设 A 为 4 阶实对称矩阵,且 $A^2+A=0$,若 A 的秩为 3,则 A 相似于(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{1}{2} & 0\leqslant x<1\\ 1-e^{-x} & x\geqslant 1\end{cases}$,则 $P\{x=1\}=$(　　)

(A) 0　　(B) $\dfrac{1}{2}$

(C) $\dfrac{1}{2}-e^{-1}$　　(D) $1-e^{-1}$

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度,$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上的均匀分布的概率密度,若 $f(x)=\begin{cases}af_1(x) & x\leqslant 0\\ bf_2(x) & x>0\end{cases}$ $(a>0,b>0)$ 为概率密度,则 a,b 应满足(　　)

(A) $2a+3b=4$　　(B) $3a+2b=4$

(C) $a+b=1$　　(D) $a+b=2$

二、填空题:(9-14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 设 $\begin{cases}x=e^{-t}\\ y=\int_0^t \ln(1+u^2)du\end{cases}$,$\dfrac{d^2y}{d^2x}\Big|_{t=0}=$ ________.

(10) $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx=$ ________.

(11) 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|$,$x\in[-1,1]$,起点是 $(-1,0)$,终点是 $(1,0)$,则曲线积分 $\int_L xydx+x^2dy=$ ________.

(12) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$,则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$ ________.

(13) 设 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T,\alpha_2=(1,1,0,2)^T,\alpha_3=(2,1,1,\alpha)^T$，若由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的向量空间维数是2，则 $\alpha=$ ________.

(14) 设随机变量 X 概率分布为 $p\{X=k\}=\dfrac{C}{K!},k=0,1,2,\cdots$，则 $EX^2=$ ________.

三、解答题：(15-23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解.

(16)(本题满分 10 分)求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

(17)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1|\ln t|t^n dt,n=1,2,\cdots$ 的大小，说明理由；

(Ⅱ)设 $M_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n$

(18)(本题满分 10 分)求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)设 P 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直，求点 P 的轨迹 C，并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，其中 $\sum$ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

(20)(本题满分 11 分)设

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix} b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$$

已知线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解，

(Ⅰ)求 λ，a；

(Ⅱ)求方程组的 $Ax=b$ 通解.

(21)(本题满分 11 分)已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 Q 的第 3 列为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$

(Ⅰ)求矩阵 A；

(Ⅱ)证明 $A+E$ 为正定矩阵，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(22)(本题满分 11 分)设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},\ -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta\in(0,1)$ 未知,以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本(样本容量为 n)中等于 i 的个数 $(i=1,2,3)$.试求常数 a_1,a_2,a_3,使 $T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量,并求 T 的方差.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试
数学(一)试题

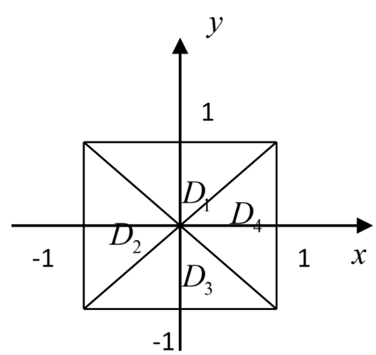
一、选择题:(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求)

(1) 当 $x \to 0$ 时, $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小量,则(　　)

(A) $a=1, b=-\frac{1}{6}$.　　(B) $a=1, b=\frac{1}{6}$.

(C) $a=-1, b=-\frac{1}{6}$.　　(D) $a=-1, b=\frac{1}{6}$.

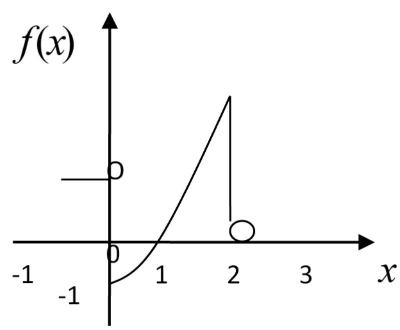
(2) 如图,正方形 $\{(x,y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$, $I_k=\iint\limits_{D_k} y\cos x dxdy$,则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=$(　　)



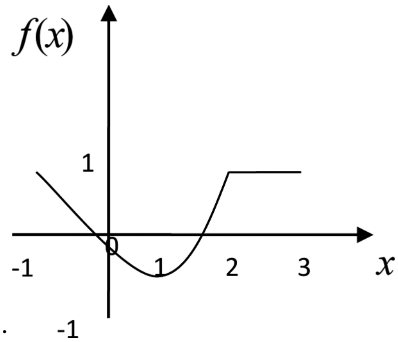
(A) I_1.　　(B) I_2.

(C) I_3.　　(D) I_4.

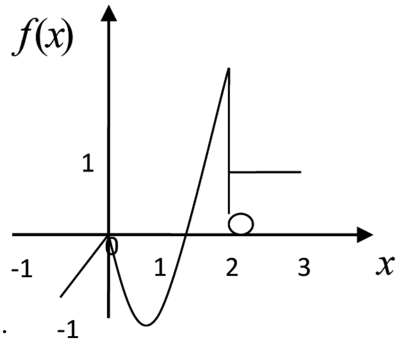
(3) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为:



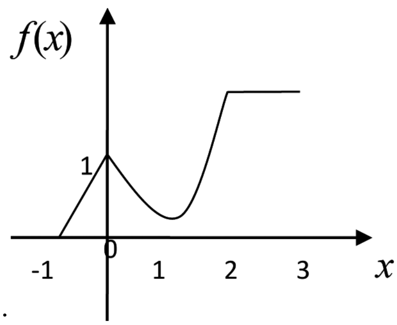
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 的图形为(　　)



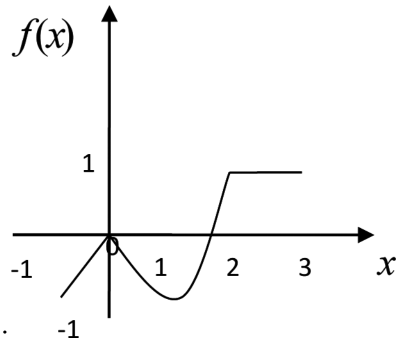
(A).



(B).



(C).



(D).

(4) 设有两个数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$,则(　　)

(A)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(B)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.

(D)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

(5) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维向量空间 R^3 的一组基,则由基 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

(6) 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵,若 $|A|=2, |B|=3$,则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$,其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数,则 $EX=$(　　)

(A) 0.　　(B) 0.3.

(C) 0.7.　　(D) 1.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$,记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数,则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为(　　)

(A)0.　　(B)1.

(C)2.　　(D)3.

二、填空题:(9–14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $z=f(x,xy)$,则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$ ________.

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$,则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解为 $y=$ ________.

(11) 已知曲线 $L: y=x^2 (0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2})$,则 $\int_L x ds=$ ________.

(12) 设 $\Omega=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$,则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz=$ ________.

(13) 若 3 维列向量 α, β 满足 $\alpha^T\beta=2$,其中 α^T 为 α 的转置,则矩阵 $\beta\alpha^T$ 的非零特征值为________.

(14) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差.若 $\bar{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量,则 $k=$ ________.

三、解答题:(15-23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

(16)(本题满分 9 分)设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}(n=1,2,.....)$ 所围成区域的面积,记 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$,求 S_1 与 S_2 的值.

(17)(本题满分 11 分)椭球面 S_1 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成,圆锥面 S_2 是过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(Ⅰ)求 S_1 及 S_2 的方程

(Ⅱ)求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

(18)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理:若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 可导,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

(Ⅱ)证明:若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$,则 $f'_+(0)$ 存在,且 $f'_+(0)=A$.

(19)(本题满分 10 分)计算曲面积分

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中 $\sum$ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

(20)(本题满分 11 分)设

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}\qquad \xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

①求满足 $A\xi_2=\xi_1$ 的 ξ_2. $A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3.

②对①中的任意向量 ξ_2,ξ_3 证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

(21)(本题满分 11 分)设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$,求 a 的值.

（22）（本题满分 11 分）

袋中有 1 个红色球，2 个黑色球与 3 个白球，现有回放地从袋中取两次，每次取一球，以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

（Ⅰ）求 $P\{X=1|Z=0\}$ ；

（Ⅱ）求二维随机变量 (X,Y) 概率分布.

（23）（本题满分 11 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda^2 xe^{-\lambda x}, x>0\\ 0, 其他\end{cases}$$，其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知，

$X_1, X_2, \cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本

（Ⅰ）求参数 λ 的矩估计量；

（Ⅱ）求参数 λ 的最大似然估计量