2018年全国硕士研究生入学统一考试
数学(一)试题详解

(1)【答案】(D)

【详解】由定义得 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=-\dfrac{1}{2}$;

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=\frac{1}{2}.$$

(2)【答案】(B)

【详解】已知平面过(1,0,0)(0,1,0)两点,可得切平面内一向量(1,−1,0),曲面 $z=x^2+y^2$ 的切平面法向量为$(2x,2y,-1)$ ∴$2x-2y=0$ 即 $x=y$.

(3)【答案】(B)

【详解】$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)!}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)!}=2\sin1+\cos1.$$

(4)【答案】(C)

【详解】$M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\pi$;

$N=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}\mathrm{d}x<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x=M$;

$K=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x=\pi$,所以 $K>M>N$.选(C).

(5)【答案】(A)

【详解】A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$,而 $r(\lambda E-A)=r(E-A)=2$.

(6)【答案】(C)

【详解】由秩的定义,可知(C)正确

(7)【答案】(A)

【详解】已知 $f(1+x)=f(1-x)$ 可得 $f(x)$ 图像关于 $x=1$ 对称，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$ 从而 $P(x\leqslant 0)=0.2$

(8)【答案】(D).

【详解】若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0，可知检验统计量 $|Z|\leqslant U_{0.025}$，此时 $|Z|\leqslant U_{0.005}$，选(D).

(9)【答案】$k=-2$

【详解】$\because \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$，$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin kx}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}-1\right)=1$，

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{kx}\cdot\dfrac{-2\tan x}{1+\tan x}=-\dfrac{2}{k}=1$，$\therefore k=-2$.

(10)【答案】$2\ln 2-2$

【详解】$\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}f'(x)=xf'(x)\big|_0^1-\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}xf'(1)-f(x)\big|_0^1$

$=2\ln 2-f(1)+f(0)=2\ln 2-2$.

(11)【答案】$(1,0,-1)$

【详解】$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & -yz & xz\end{vmatrix}=(y,-z,-x)\big|_{(1,1,0)}=(1,0,-1)$.

【详解】$\because \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$，$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin kx}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}-1\right)=1$，

(12)【答案】$-\dfrac{\pi}{3}$

【详解】$L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$，$\oint_L xy\mathrm{d}s=\oint_L\left[\dfrac{1}{2}-(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}s$，

$\oint_L\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}\right]\mathrm{d}s=-\dfrac{1}{6}\cdot 2\pi=-\dfrac{\pi}{3}$.

(13)【答案】

【详解】$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，$A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$

$A(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$，

$\therefore\lambda_1^2=\lambda_2^2=1$，$\therefore\lambda_1=\pm 1$，$\lambda_2=\pm 1$，$\therefore |A|=-1$

(14)【答案】$\frac{1}{4}$

【详解】$P(AC|AB\cup C)=\frac{P[(AC)(AB\cup C)]}{P(AB\cup C)}=\frac{P(ABC\cup AC)}{P(AB)+P(C)-P(ABC)}$

$=\frac{P(AC)}{\frac{1}{4}+P(C)}=\frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{4}+P(C)}=\frac{1}{4}$，所以 $P(C)=\frac{1}{4}$.

(15)【详解】$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,dx=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}\,de^{2x}$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot\frac{\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}}{1+(e^x-1)}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^x-1+1}{\sqrt{e^x-1}}de^x$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\sqrt{e^x-1}+\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}d(e^x-1)$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{e^x-1}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C.$$

(16)【详解】设圆的周长为 x，正三角周长为 y，正方形的周长 z，由题设 $x+y+z=2$.

则目标函数：$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{y}{3}\right)^2+\left(\frac{z}{4}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}y^2+\frac{z^2}{16}$，

故拉格朗日函数为

$L(x,y,z;\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}y^2+\frac{z^2}{16}+\lambda(x+y+z-2)$.

则 $$L'_x=\frac{x}{2\pi}+\lambda=0,$$

$$L'_y=\frac{2\sqrt{3}y}{36}+\lambda=0,$$

$$L'_z=\frac{2z}{16}+\lambda=0,$$

$$L'_{\lambda}=x+y+z-2=0.$$

解得 $x=\dfrac{2\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4}$，$y=\dfrac{6\sqrt{3}\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4}$，$z=\dfrac{8}{\pi+3\sqrt{3}+4}$，$\lambda=\dfrac{-1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$．

此时面积和有最小值 $S=\dfrac{1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$．

(17)**【详解】** 构造平面 Σ'：$\begin{cases}3y^2+3z^2=1,\\ x=0,\end{cases}$ 取后侧；设 Σ' 与 Σ 所围区域为 Ω；

记 $P=x$，$Q=y^3+z$，$R=z^3$；借助高斯公式，有：

$$\iint\limits_{\Sigma}P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma'}P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy-\iint\limits_{\Sigma'}P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(P'_x+Q'_y+R'_z)\,dx\,dy\,dz-0=\iiint\limits_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$=\iint\limits_{3y^2+3z^2?\,1}dy\,dz\int_0^{\sqrt{1-3y^2-3z^2}}(1+3y^2+3z^2)\,dx$$

$$=\iint\limits_{3y^2+3z^2?\,1}\sqrt{1-3y^2-3z^2}\,(1+3y^2+3z^2)\,dy\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}\,(1+3r^2)\cdot r\,dr=2\pi(-\frac{1}{6})\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}\,(1+3r^2)\,d(1-3r^2)$$

$$=\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}\,(1-3r^2-2)\,d(1-3r^2)=\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}[(1-3r^2)^{\frac{3}{2}}-2(1-3r^2)^{\frac{1}{2}}]\,d(1-3r^2)$$

$$=\frac{\pi}{3}[\frac{2}{5}(1-3r^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(1-3r^2)^{\frac{1}{2}}]\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{14\pi}{45}.$$

(18)**【详解】** (I)通解 $y(x)=e^{-\int 1dx}(\int xe^{\int 1dx}dx+C)$

$$=e^{-x}(\int xe^{x}dx+C)$$

$$=e^{-x}[(x-1)e^{x}+C]$$

$$=(x-1)+Ce^{-x}.$$

(II)设 $f(x+T)=f(x)$，即 T 是 $f(x)$ 的周期.

通解 $y(x)=e^{-\int 1dx}[\int f(x)e^{\int 1dx}dx+C]$

$$=e^{-x}[\int f(x)e^{x}dx+C]$$

$$=e^{-x}\int f(x)e^{x}dx+Ce^{-x}.$$

不妨设 $y(x)=\mathrm{e}^{-x}\int_T^x f(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+C\mathrm{e}^{-x}$,则有

$$
\begin{aligned}
y(x+T)&=\mathrm{e}^{-(x+T)}\int_T^{x+T} f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+C\mathrm{e}^{-(x+T)}\\
&=\mathrm{e}^{-(x+T)}\int_0^x f(u+T)\mathrm{e}^{u+T}\mathrm{d}(u+T)+(C\mathrm{e}^{-T})\cdot\mathrm{e}^{-x}\\
&=\mathrm{e}^{-(x+T)}\int_0^x f(u)\mathrm{e}^u\cdot\mathrm{e}^T\mathrm{d}u+(C\mathrm{e}^{-T})\cdot\mathrm{e}^{-x}\\
&=\mathrm{e}^{-x}\int_0^x f(u)\mathrm{e}^u\mathrm{d}u+(C\mathrm{e}^{-T})\cdot\mathrm{e}^{-x},
\end{aligned}
$$

即 $y(x+T)$ 依旧是方程的通解,结论得证.

(19)【证明】设 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x$, $x>0$,则有

$f'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$,因此 $f(x)>0$, $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}>1$,

从而 $\mathrm{e}_{x_2}=\dfrac{\mathrm{e}_{x_1}-1}{x_1}>1$, $x_2>0$;

猜想 $x_n>0$,现用数学归纳法证明:

$n=1$ 时, $x_1>0$,成立;

假设 $n=k(k=1,2,\cdots)$ 时,有 $x_k>0$,则 $n=k+1$ 时有

$\mathrm{e}_{x_{k+1}}=\dfrac{\mathrm{e}_{x_k}-1}{x_k}>1$,所以 $x_{k+1}>0$;

因此 $x_n>0$,有下界.

又 $x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{\mathrm{e}_{x_n}-1}{x_n}-\ln\mathrm{e}_{x_n}=\ln\dfrac{\mathrm{e}_{x_n}-1}{x_n\mathrm{e}_{x_n}}$;

设 $g(x)=\mathrm{e}^x-1-x\mathrm{e}^x$,

$x>0$ 时, $g'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x=-x\mathrm{e}^x<0$,

所以 $g(x)$ 单调递减, $g(x)<g(0)=0$,即有 $\mathrm{e}^x-1<x\mathrm{e}^x$,

因此 $x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{\mathrm{e}_{x_n}-1}{x_n\mathrm{e}_{x_n}}<\ln 1=0$, x_n 单调递减.

由单调有界准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则有 $A\mathrm{e}^A=\mathrm{e}^A-1$;

因为 $g(x)=\mathrm{e}^x-1-x\mathrm{e}^x$ 只有唯一的零点 $x=0$,所以 $A=0$.

(20)【详解】(Ⅰ)由 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 得

$$
\begin{cases}
x_1-x_2+x_3=0,\\
x_2+x_3=0,\\
x_1+ax_3=0,
\end{cases}
$$

系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & a\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & a-2\end{pmatrix}$,

$a\neq 2$ 时,$r(A)=3$,方程组有唯一解:$x_1=x_2=x_3=0$;

$a=2$ 时,$r(A)=2$,方程组有无穷解:$x=k\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$,$k\in R$.

(II) $a\neq 2$ 时,令 $\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3,\\ y_2=x_2+x_3,\\ y_3=x_1+ax_3,\end{cases}$ 这是一个可逆变换,

因此其规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$;

$a=2$ 时,$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2$

$$=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_2x_3+6x_1x_3$$

$$=2\left(x_1-\frac{x_2-3x_3}{2}\right)^2+\frac{3(x_2+x_3)^2}{2},$$

此时规范形为 $y_1^2+y_2^2$.

(21)**【详解】**(I) A 与 B 等价,则 $r(A)=r(B)$.

又 $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -a\end{vmatrix}\overset{r_3-r_1}{=}\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & 9 & 0\end{vmatrix}=0$,

所以 $|B|=\begin{vmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{=}\begin{vmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & a+1 & 3\end{vmatrix}=2-a=0$,

$a=2$.

(II) $AP=B$,即解矩阵方程 $AX=B$:

$(A,B)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 7 & -2 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

得 $P=\begin{pmatrix}-6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4\\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}$;

又 P 可逆,所以 $|P|\neq 0$,即 $k_2\neq k_3$.

最终 $P=\begin{pmatrix}-6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4\\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数，且 $k_2\neq k_3$.

(22)【详解】(1)由已知 $P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$，Y 服从 λ 的泊松分布，

所以 $\operatorname{cov}(X,Z)=cov(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)E(XY)$

$E(X^2)E(Y)-E^2(X)E(Y)=D(X)E(Y)=\lambda$.

(2)由条件可知 Z 的取值为 $0,\pm1,\pm2\cdots$，

$P\{Z=0\}=P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda}$，

$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{2}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}$，$P\{Z=-1\}=P\{X=-1,Y=1\}=\frac{1}{2}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}$，

同理，$P\{Z=k\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^{|k|}\mathrm{e}^{-\lambda}}{|k|!}$，$k=\pm1,\pm2\cdots$，

$P\{Z=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda}$.

(23)【详解】(1)由条件可知，似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x_i|}{\sigma}},x_i\in R,i=1,2,\cdots n\ ,$$

取对数：$\ln L(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\left[-\ln 2\sigma-\frac{|x_i|}{\sigma}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[-\ln 2-\ln\sigma-\frac{|x_i|}{\sigma}\right]$，

求导：$\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{\sigma}+\frac{|x_i|}{\sigma^2}\right]=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_1|}{\sigma^2}=0$，

解得 σ 得极大似然估计 $\hat{\sigma}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_1|}{n}$.

(2)由第一问可知 $\hat{\sigma}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_1|}{n}$，所以 $E(\hat{\sigma})=E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=\sigma$.

$$D(\hat{\sigma})=D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_1|}{n}\right)=\frac{1}{n}D(|X|)=\frac{1}{n}\{E(X^2)-E^2(|X|)\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x-\sigma^2\right\}=\frac{1}{n}\left\{\int_{0}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x-\sigma^2\right\}=\frac{\sigma^2}{n}\ .$$

2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题详解

(1)【答案】(A)

【详解】由

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{(\sqrt{x})^2}{2}}{ax}=\frac{1}{2a}$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}b=b$$

函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则有 $\frac{1}{2a}=b$,即 $ab=\frac{1}{2}$

(2)【答案】(C)

【详解】由 $f(x)f'(x)>0$ 可得,

$[f^2(x)]'=2f(x)f'(x)>0.$

所以,$f^2(x)$ 在其实数范围内为增函数,即 $f^2(-1)<f^2(1)$,因此 $|f(-1)|<|f(1)|$.

(3)【答案】(D)

【详解】由方向导数公式有:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}\Big|_{(1,2,0)}=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,2,0)}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,2,0)}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(1,2,0)}\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 分别为 $\vec{u}$ 沿 x 轴、y 轴、z 轴的方向余弦.

而,

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}},\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}},\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,2,0)}=4,\ \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,2,0)}=1,\ \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(1,2,0)}=0$$

因此,$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}\Big|_{(1,2,0)}=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+0=2$

(4)【答案】(C)

【详解】从 0 到 t_0 这段时间内甲乙的位移分别为 $\int_0^{t_0} v_1(t)dt$,$\int_0^{t_0} v_2(t)dt$,则乙要追上甲,即乙比甲多跑 $10m$,因此 $\int_0^{t_0} v_2(t)dt - \int_0^{t_0} v_1(t)dt = 10$.由定积分的几何意义及图可知 $t_0 = 25$.

(5)【答案】(A)

【详解】由 α 为 n 维单位列向量知,$\alpha^T\alpha = 1$,因此

$$(E - \alpha\alpha^{\mathrm{T}})\alpha = E\alpha - \alpha\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = \alpha - \alpha = 0$$

即 0 是 $E - \alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 的特征值,所以,$E - \alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆

(6)【答案】(B)

【详解】令 $|\lambda E - A| = 0$,解得 $\lambda = 2,2,1$.即 A 的特征值为 2,2,1.又 $3 - r(2E - A) = 1$.因此,A 可相似对角化.

令 $|\lambda E - B| = 0$,解得 B 的特征值为 2,2,1.又 $3 - r(2E - B) = 2$.因此,B 不可相似对角化. C 为对角形矩阵.所以,A 与 C 相似,B 与 C 不相似.正确答案选(B)

(7)【答案】(A)

【详解】因为

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},\ P(A|\bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)},$$

所以,由 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$ 得,

$$\frac{P(AB)}{P(B)} > \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}$$

整理,得 $P(AB) > P(A)P(B)$

选项(A):

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)},\ P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)};$$

所以,由 $P(B|A) > P(B|\bar{A})$ 可得

$$\frac{P(AB)}{P(A)} > \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)},$$

整理,得 $P(AB) > P(A)P(B)$.正确

同理可推出选项(B)、(C)、(D)均不正确.

(8)【答案】(B)

【详解】因为总体服从 $N(\mu,1)$，则 $x_i-\mu\sim N(0,1)$ 因此，

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)\qquad\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$$

(A)正确(C)正确；

$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\sim N\left(\mu,\frac{1}{n}\right)$，则

$$\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\sim N(0,1)\ ,$$

因此 $n(\bar{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1)$，(D)正确

(9)【答案】0

【详解】因为 $\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,-1<t<1$；所以

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n},-1<x<1\ ,;$$

因此，由泰勒公式可得，$f^{(3)}(0)=0$

【评注】本题也可以直接计算 $f(x)$ 三阶导数 $f^{(3)}(x)$，然后把 $x=0$ 代入计算出 $f^{(3)}(0)$．

(10)【答案】$e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$

【详解】$y''+2y'+3y=0$ 的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda+3=0$$

解得特征根为

$$\lambda=-1\pm\sqrt{2}i$$

因此，微分方程的通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$$

(11)【答案】-1

【详解】令 $P=\frac{x}{x^2+y^2-1}$，$Q=\frac{-ay}{x^2+y^2-1}$；由积分与路径无关可得

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

代入，解得 $a=-1$.

(12)【答案】$\frac{1}{(x+1)^2}$

【详解】$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n}\right)'=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n}\right)'=-\left(\frac{1}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^{2}}$

(13)【答案】2

【详解】因为 $(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ ，α_1、α_2、α_3 线性无关；所以，

秩 $(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=$ 秩 (A)

又

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix},$$

可得秩 $(A)=2$.因此，$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)$ 的秩为 2

(14)【答案】2

【详解】因为分布函数 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$，所以，概率密度函数

$$f(x)=F'(x)=0.5\Phi'(x)+\frac{0.5}{2}\Phi'\left(\frac{x-4}{2}\right)=0.5\varphi(x)+\frac{0.5}{2}\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)$$

（其中，$\varphi(x)$ 为标准正态分布的概率密度函数）

因此

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=0.5\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx+\frac{0.5}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)dx$$

$$=0.5*0+\frac{0.5}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+4)\varphi(t)d(2t+4)$$

$$=0+0.5\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+4)\varphi(t)dt$$

$$=0.5\int_{-\infty}^{+\infty}2t\varphi(t)dt+0.5\int_{-\infty}^{+\infty}4\varphi(t)dt$$

$$=0.5\cdot 0+0.5\cdot 4=2$$

(15)【详解】令 $u=e^x,v=\cos x$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot e^x-\frac{\partial f}{\partial v}\sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot e^x-\frac{\partial f}{\partial v}\sin x\right)}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{du}{dx}e^x+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}e^x+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot e^x-\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{du}{dx}\sin x-\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{dv}{dx}\sin x-\frac{\partial f}{\partial v}\cos x$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot e^{2x}-\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot e^x\sin x+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot e^x-\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot e^x\sin x+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\sin^2 x-\frac{\partial f}{\partial v}\cos x$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot e^{2x}-2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot e^x\sin x+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\sin^2 x+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot e^x-\frac{\partial f}{\partial v}\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot e^x-\frac{\partial f}{\partial v}\sin x\right)\Big|_{x=0}=f_u{}'(1,1)e^0-f_v{}'(1,1)\sin 0=f_u{}'(1,1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot e^{2x}-2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot e^x\sin x+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\sin^2 x+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot e^x-\frac{\partial f}{\partial v}\cos x\right)\Big|_{x=0}$$

$$=f''_{uu}(1,1)\cdot e^0-2f''_{uv}(1,1)\cdot e^0\cdot\sin 0+f''_{vv}(1,1)\sin^2 0+f'_u(1,1)e^0-f'_v(1,1)\cos 0$$

$$=f''_{uu}(1,1)+f'_u(1,1)-f'_v(1,1)$$

(16)**【详解】**

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}ln(1+\frac{k}{n})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}ln(1+\frac{k}{n})\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)dx^2$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 d\ln(1+x)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2-1)+1}{1+x}dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)dx-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)-\frac{1}{2}\ln 2$$

(17)**【详解】** 方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 两边同时对 x 求导,得

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-3+3\frac{dy}{dx}=0 \qquad ①$$

解,得 $\frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2}{1+y^2}$

令 $\frac{dy}{dx}=0$,解得 $x=\pm1$,分别代入方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$,得

$$\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-1\\ y=0\end{cases}$$

因此,驻点为 $(1,1)$,$(-1,0)$.

对①两边再同时对 x 求导,得

$$6x+6y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+3y^2\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{d^2y}{dx^2}=0 \qquad ②$$

把点 $(1,1)$ 及 $\frac{dy}{dx}=0$ 代入②，得 $\frac{d^2y}{dx^2}=-1<0$

因此，$(1,1)$ 为函数 $y(x)$ 的极大值点

把点 $(-1,0)$ 及 $\frac{dy}{dx}=0$ 代入②，得 $\frac{d^2y}{dx^2}=2>0$

因此，$(-1,0)$ 为函数 $y(x)$ 的极小值点.

综上所述，$y(x)$ 在 $x=1$ 处有极大值 1，在 $x=-1$ 处有极小值 0.

(18)**【详解】**(I)因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，由极限的保号性可知，存在 $c\in U^+(0)$ 使得，$\frac{f(c)}{c}<0$，即 $f(c)<0$.又 $f(1)>0$，由零点定理可得，存在 $\xi\in(c,1)$，使得 $f(\xi)=0$.

因此，方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 至少存在一个根.

(II)令 $F(x)=f(x)f'(x)$ 则

$$F'(x)=f(x)f''(x)-[f'(x)]^2$$

一方面，由 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，可得 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$.

另一方面，设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

因此，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0=f(0)$ 即，$f(0)=0$.有 $F(0)=f(0)f'(0)=0$

而由(I)知，$f(\xi)=0$，有 $F(\xi)=f(\xi)f'(\xi)=0$

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{}=\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)<0$

及 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，得 $f'(0)<0$

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上由拉格朗日中值定理得存在 $\eta\in(0,1)$，使得

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(\eta)$

由 $f(1)>0$，$f(0)=0$ 可得 $f'(\eta)>0$

由零点定理得存在，$\xi_1\in(0,\eta)$ 使得 $f'(\xi_1)=0$

即

$$F(\xi_1)=f(\xi_1)f'(\xi_1)=0$$

综上所述 $F(0)=F(\xi)=F(\xi_1)=0$

由罗尔定理可得存在 $\eta_1\in(0,\xi)$，$\eta_2\in(\xi,\xi_1)$，使得，

$$F'(\eta_1)=0,F'(\eta_2)=0$$

因此，$F'(x)$ 在 $[0,1]$ 上至少有两个零点，即方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同的实根.

(19)【详解】(I)由 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases}$ 可得 C 在 xOy 平面上投影为

$$\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=2x \\ z=0 \end{cases},$$

即 $\begin{cases} (x-1)^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$.

(II) $M=\iint\limits_s \mu(x,y,z)\,ds=\iint\limits_s 9\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds$

$$=\iint\limits_{s_{xoy}} 9\sqrt{x^2+y^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\cdot\sqrt{z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy$$

$$=18\iint\limits_{s_{xoy}}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2 d\rho$$

$$=64$$

(20)【详解】(I)证明:因为 A 有 3 个不同的特征值，所以，0 至多是矩阵 A 的单根，因此，$r(A)\geqslant 2$

又因为 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关;所以，$r(A)\leqslant 2$.综上所述，$r(A)=2$

(II)由(I) $r(A)=2$ 可得 $AX=0$ 的基础解系有一个向量.而由 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，即 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$，得

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=0$$

所以，$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 为 $AX=0$ 的基础解系.因为，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta,$$

即 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta$，所以，$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为 $Ax=\beta$ 的特解.

因此，方程 $Ax=\beta$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(21)【详解】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵为 A，则 $A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$

由 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，可知，矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,0$.即 $r(A)=2$.所以 $|A|=0$.解 $|A|=\begin{vmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{vmatrix}=0$，得 $a=2$

令 $|\lambda E-A|=0$，解得 $\lambda=-3,6,0$

$(-3E-A)X=0$ 的基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，其单位向量为 $\beta_1=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

$(6E-A)X=0$ 的基础解系为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，其单位向量为 $\beta_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$(0E-A)X=0$ 的基础解系为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，其单位向量为 $\beta_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

令 $\lambda_1=-3,\lambda_2=6$.则

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac13\\ \frac{-1}{\sqrt3}&0&\frac23\\ \frac{1}{\sqrt3}&\frac{-1}{\sqrt2}&\frac13\end{pmatrix}$$

(22)【详解】(I) $EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)dy=\int_0^1 y\cdot 2ydy=2\int_0^1 y^2dy=2\cdot\frac{y^2}{3}\Big|_0^1=\frac23$

$$P(Y\leqslant EY)=P\left(Y\leqslant\frac23\right)=\int_{-\infty}^{\frac23}f(y)dy=\int_0^{\frac23}2ydy=y^2\Big|_0^{\frac23}=\frac49$$

(II) Z 的分布函数

$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant z)$

$$=P(X+Y\leqslant z\mid X=0)P(X=0)+P(X+Y\leqslant z\mid X=2)P(X=2)$$

$$=P(Y\leqslant z)\cdot\frac{1}{2}+P(Y\leqslant z-2)\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[P(Y\leqslant z)+P(Y\leqslant z-2)]$$

当 $Z<0$ 时，$P(Y\leqslant Z)=0$，$P(Y\leqslant Z-2)=0$ 所以，$F_Z(z)=0$.

当 $0\leqslant Z<1$ 时，$P(Y\leqslant Z)=\int_0^z 2y\,dy=z^2$，$P(Y\leqslant Z-2)=0$ 所以，

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}[z^2+0]=\frac{z^2}{2}$$

当 $1\leqslant Z<2$ 时，$P(Y\leqslant Z)=\int_0^1 2y\,dy=1$，$P(Y\leqslant Z-2)=0$ 所以，

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}[1+0]=\frac{1}{2}$$

当 $2\leqslant Z<3$ 时，$P(Y\leqslant Z)=1$，$P(Y\leqslant Z-2)=\int_0^{z-2} 2y\,dy=(z-2)^2$ 所以，

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}[1+(z-2)^2]$$

当 $Z\geqslant 3$ 时，$F_Z(z)=1$.

因此，分布函数

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{z^2}{2}, & 0\leqslant z<1\\ \dfrac{1}{2}, & 1\leqslant z<2\\ \dfrac{1}{2}\left[1+\dfrac{(z-2)^2}{2}\right], & 2\leqslant z<3\\ 1, & z\geqslant 3\end{cases}$$

所以，$Z=X+Y$ 的概率密度函数

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}z, & 0\leqslant z<1\\ z-2, & 2\leqslant z<3\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

(23)【详解】(I) Z_i 的分布函数

$$F_{Z_i}(z)=P(z_i\leqslant z)=P(|x_i-\mu|\leqslant z)=P\left(\left|\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right|\leqslant\frac{z}{\sigma}\right)$$

当 $z\leqslant 0$ 时，$F_{Z_i}(z)=0$.

当 $z>0$ 时，$F_{Z_i}(z)=2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-1$.

因此，Z_i 的概率密度函数

$$f_{z_i}(z)=F_{Z_i}{}'(z)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}},z>0\\ 0，其他\end{cases}$$

(II)期望 $EZ_i=\int_0^{+\infty}z\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$.

令 $EZ_i=\bar{Z}$，解得 $\sigma=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\bar{Z}$

因此，σ 的矩估计量 $\hat{\sigma}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\bar{Z}$

(III)最大似然估计函数

$$f(z_1,z_2,\cdots,z_n,\sigma)=\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\frac{1}{\sigma^n}e^{-\frac{z_1^2+\cdots z_n^2}{2\sigma^2}}(z_i>0)$$

两边同时取对数，化简得

$$\ln f(z_1,z_2,\cdots,z_n,\sigma)=n\ln\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)-n\ln\sigma-\frac{z_1^2+\cdots z_n^2}{2\sigma^2}\ (z_i>0)$$

两边同时对 σ 求导，并令其等于零

$$\frac{\partial\ln f(z_1,z_2,\cdots,z_n,\sigma)}{\partial\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{z_1^2+\cdots z_n^2}{\sigma^3}=0$$

解，得

$$\sigma=\sqrt{\frac{z_1^2+\cdots z_n^2}{n}}$$

所以，σ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{z_1^2+\cdots z_n^2}{n}}$.

2016年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题详解

(1)【答案】(C)

【详解】因为，$\lim\limits_{x\to 0^+} x^a \cdot \dfrac{1}{x^a(1+x)^b}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty} x^{a+b}\cdot\dfrac{1}{x^a(1+x)^b}=1$.

要使 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛，则有 $a<1$，$a+b>1$，正确答案为(C)

(2)【答案】(D)

【详解1】排除法：

由原函数可导知，原函数一定连续，所以原函数在 $x=1$ 处连续，排除(A)和(C)由已知条件，可知原函数满足 $F'(1)=f(1)=0$.

(B)选项中：

$$F'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x(\ln x+1)-1-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x+2}{1}=2$$

所以(B)错误，选(D)

【详解2】直接法：

对选项(D)中的函数求导，

$$F'(x)=\begin{cases}2(x-1),\ x<1\\ \ln x,\ x>1\end{cases},$$

又由 $F'_+(1)=F'_-(1)=0$，得 $F'(1)=0$

所以，$f(x)=F'(x)$　因此(D)选项是正确答案。

(3)【答案】(A)

【详解】令 $y_1=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$，$y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$

由已知可得 $y_1-y_2=-2\sqrt{1+x^2}$ 是 $y'+p(x)y=0$ 的解

所以，$-2\cdot\dfrac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x-2\sqrt{1+x^2}\cdot p(x)=0$，解得，$p(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$

同样由已知可得，$\frac{y_1+y_2}{2}=(1+x^2)^2$ 是 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解.

所以，$[(1+x^2)^2]'+p(x)\cdot(1+x^2)^2=q(x)$

解得，$q(x)=4x\cdot 2x+p(x)\cdot(1+x^2)^2=3x(1+x^2)$

故选(A)

(4)【答案】(D)

【详解】因

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots \end{cases}$$

则

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=0,\lim_{x\to 0^-}f(x)=0$$

所以，$f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0,\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$ 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x}=1$$

所以，$f'(0)=f'_-(0)=0=f'_+(0)=1$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。故选(D)

(5)【答案】(C)

【详解】A 与 B 相似，即存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$，则

$$B^T=(P^{-1}AP)^T=P^TA^T(P^{-1})^T=((P^T)^{-1})^{-1}A^T(P^T)^{-1},$$

即(A)是正确的

$$B^{-1}=(P^{-1}AP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$$

进一步有

$$B+B^{-1}=P^{-1}AP+P^{-1}A^{-1}P=P^{-1}(A+A^{-1})P$$

即(B)(D)都是正确的；故选(C)

(6)【答案】(B)

【详解】因为 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$

对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$

令 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$

解得，$\lambda=-1,-1,5$

所以二次型在正交变换 $X=QY$ 下的标准形为 $f(y_1,y_2,y_3)=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$

所以，$f(x_1,x_2,x_3)=2$ 表示双叶双曲面，选(B)

(7)【答案】(B)

【详解】因为 $P=P\{X\leqslant \mu+\sigma^2\}=P\left\{\dfrac{X-\mu}{\sigma}\leqslant \sigma\right\}=\Phi(\sigma)$ ，

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，$\Phi(x)$ 是单调增加的，故选(B)

(8)【答案】(A)

【详解】由题意可知 $X\sim B\left(2,\dfrac{1}{3}\right)$ ，$Y\sim B\left(2,\dfrac{1}{3}\right)$ 所以，$EX=EY=\dfrac{2}{3}$ ，$DX=DY=\dfrac{4}{9}$

$EXY=0\cdot 0P(X=0,Y=0)+0\cdot 1P(X=0,Y=1)+1\cdot 1P(X=1,Y=1)+1\cdot 0P(X=1,Y=0)\quad=P(X=1,Y=1)=\dfrac{2}{9}$

因此，

$$\rho_{XY}=\frac{EXY-EX\cdot EY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=-\frac{1}{2}$$

(9)【答案】$\dfrac{1}{2}$

【详解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{\frac{1}{2}x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x\sin x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

(10)【答案】$\vec{j}+(y-1)\vec{k}$

【详解】$rotA=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x+y+z & xy & z\end{vmatrix}=\vec{j}+(y-1)\vec{k}$

(11)【答案】$-dx+2dy$

【详解】对方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 等式两边同时分别对 x,y 求偏导数，得到

$$z+(x+1)z'_x=2xf(x-z,y)+x^2f'_1\cdot(1-z'_x)$$

$$(x+1)z'_y-2y=x^2[f'_1\cdot(-z'_y)+f'_2]$$

把 $x=0,y=1,z=1$ 分别代入上面两式，得 $z'_x(0,1)=-1,z'_y(0,1)=2$

所以，$dz|_{(0,1)}=-dx+2dy$

(12)【答案】$\frac{1}{2}$

【详解】$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-ax^2}{(1+ax^2)^2}$，$f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}+\frac{2ax(3-ax^2)}{(1+ax^2)^3}$

所以，

$$f'''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}+\frac{2ax(3-ax^2)}{(1+ax^2)^3}-0}{x}=-2+6a$$

而由已知 $f'''(0)=1$　　可得，$-2+6a=1$。解得，$a=\frac{1}{2}$

(13)【答案】$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$

【详解】$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}+4=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$

(14)【答案】$(8.2,10.8)$

【详解】因为 $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{1}{n}\sigma^2\right)$ 则 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{n}}\sigma}\sim N(0,1)$

所以，$P\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{n}}\sigma}<Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=0.95$　　其中 $\alpha=0.05$

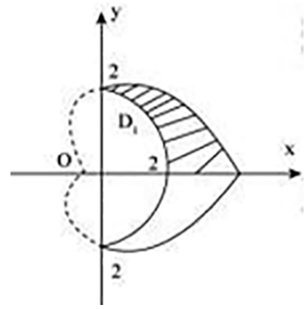
即得置信度为 0.95 的置信区间为 $\left(\bar{X}-\sqrt{\frac{1}{n}}\cdot\sigma\cdot Z_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\sqrt{\frac{1}{n}}\cdot\sigma\cdot Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

因为 μ 的置信上限为 10.8，且 $\bar{x}=9.5$，分别代入上限 $\bar{X}+\sqrt{\frac{1}{n}}\cdot\sigma\cdot Z_{\frac{\alpha}{2}}$

可解得，$\sqrt{\frac{1}{n}}\cdot\sigma\cdot Z_{\frac{\alpha}{2}}=1.3$。所以，$\mu$ 的双侧置信区间为 $(9.5-1.3,10.8)=$

(8.2,10.8)

(15)【详解】平面区域 D 如图所示:由圆和心形线所围成。区域 D 关于 x 轴对称



$$\iint_D xdxdy = 2\iint_{D_1} xdxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} r^2\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{16\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(1+\cos\theta)^3 - 1]\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{16\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta) d\theta$$

$$= \frac{32}{3} + 5\pi$$

(16)【详解】(I) $y'' + 2y' + ky = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + k = 0$

解得,$\lambda = -1-\sqrt{1-k}$,$-1+\sqrt{1-k}$　所以,$y(x) = c_1 e^{(-1-\sqrt{1+k})x} + c_2 e^{(-1+\sqrt{1+k})x}$,

所以,

$$\int_0^{+\infty} y(x)dx = \int_0^{+\infty}[c_1 e^{(-1-\sqrt{1-k})x} + c_2 e^{(-1+\sqrt{1-k})x}]dx$$

$$= -\left(\frac{c_1}{-1-\sqrt{1-k}} + \frac{c_2}{-1+\sqrt{1-k}}\right)$$

即,$\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛

(II)因为 $y(0)=1, y'(0)=1$ 所以

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ (-1-\sqrt{1-k})c_1 + (-1+\sqrt{1-k})c_2 = 1 \end{cases}$$

解得,

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{-2+\sqrt{1-k}}{2\sqrt{1-k}} \\ c_2 = \dfrac{2+\sqrt{1-k}}{2\sqrt{1-k}} \end{cases}$$

所以,

$$\int_0^{+\infty} y(x)dx = -\left(\frac{c_1}{-1-\sqrt{1-k}} + \frac{c_2}{-1+\sqrt{1-k}}\right) = \frac{3}{k}$$

(17)【详解】由 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$　可得,$f(x,y) = xe^{2x}\cdot e^y + \varphi(y)$

又因为 $f(0,y)=\varphi(y)=y+1$ 即，$\varphi(y)=y+1$

所以，$f(x,y)=xe^{2x}\cdot e^{y}+y+1$

而已知 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-xe^{2x-y}+1$ 所以，$I(t)=\int_{L_t}(2x+1)e^{2x-y}dx+(-xe^{2x-y}+1)dy$

令 $P(x,y)=(2x+1)e^{2x-y}$，$Q(x,y)=-xe^{2x-y}+1$，则可得 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

所以，曲线积分与路径无关

因此，

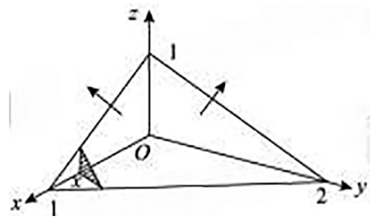
$$I(t)=\int_{L_t}(2x+1)e^{2x-y}dx+(-xe^{2x-y}+1)dy$$

$$=\int_0^1(2x+1)e^{2x}dx+\int_0^t(-e^{2-y}+1)dy=t+e^{2-t}$$

令 $I'(t)=1-e^{2-t}=0$ 解得，$t=2$ 又由 $I''(t)\big|_{t=2}=e^{2-t}\big|_{t=2}=1>0$

所以，当 $t=2$ 时，$I(t)$ 取极小值，且为最小值.所以，$I(t)$ 的最小值为 $I(2)=3$

(18)【详解】由高斯公式可得



$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+1)dydz-2ydzdx+3zdxdy.$$

$$=\iiint_{\Omega}(2x-2+3)dxdydz=\iiint_{\Omega}(2x+1)dxdydz$$

$$=\int_0^1dx\iint_D(2x+1)dydz=\int_0^1(2x+1)dx\iint_D dydz$$

（D 为由直线 $y+2z=2-2x$，$y=0$，$z=0$ 围成的区域；其中 x 为常数）

$$=\int_0^1(2x+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2(1-x)^2dx=\frac{1}{2}$$

(19)【详解】(I)由题意知

$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})|$（$\xi$ 介于 x_{n-1} 与 x_n 之间）$<$ $\dfrac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|<\dfrac{1}{2^2}|x_{n-1}-x_{n-2}|\cdots<\dfrac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|=|x_2-x_1|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}$ 收敛，所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛。

(II)由(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛，可得其部分和的极限

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_n\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_1)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}-x_1$$

存在，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}$ 存在，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由于 $f(x)$ 可导，$f(x)$ 连续，对 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两边同时取极限得，$a=f(a)$

又 $f(0)=1$ 及 $f(a)-f(0)=f'(\xi)a$，（ξ 介于 0 与 a 之间）得 $a=\dfrac{1}{1-f'(\xi)}$

由已知条件，$0<f'(\xi)<\dfrac{1}{2}$ 故 $0<a<2$

(20)【详解】(I) $(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1-a&0\\1&0&a&1\\a+1&1&a+1&2a-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1-a&1\\0&1&1-2a&-1\\0&0&2a-a^2&a-2\end{array}\right)$

当 $a=0$ 时，$r(A)=2$，$r(A,\beta)=3$，$Ax=\beta$ 无解

(II) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$　　$A^TA=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$

$A^T\beta=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$

$(A^TA,A^T\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$

所以，$A^TA=0$ 的基础解析系为 $\xi=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$A^TA=\beta$ 的特解为 $\eta=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$，因此，$A^TA=\beta$ 的通解为 $x=k\xi+\eta$，其中 k 为任意常数.

(21)【详解】(I) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$

所以，A 的特征值为 $-1,-2,0$

其对应的特征向量分别为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$， $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

有 $P^{-1}AP=\Lambda$，易知

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

所以，$A=P\Lambda P^{-1}$

$$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^{99}&0&0\\0&(-2)^{99}&0\\0&0&0^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(II) $B^2=BA$ $\quad B^3=B(B^2A)=B(BA)=B^2A=BAA=BA^2$

$B^4=B^2A^2=BAA^2=BA^2=BAA^2=BA^3$

依次类推得，$B^{100}=BA^{99}$

所以，有

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{99}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

从而有

$$\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2$$

$$\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2$$

$$\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2$$

(22)**【详解】**(I)区域 D 的面积

$$S_D=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\frac{1}{3}$$

故 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(II) $P\left\{U=0,X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=P\left\{X>Y,X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{x}3dy=3\int_0^{\frac{1}{2}}(x-x^2)dx=\frac{1}{4}$

又

$$P\{U=0\}=P\{X>Y\}=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}3dy=3\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{1}{2}$$

$$P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=3\int_0^{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}-x^2)dx=\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}$$

所以，

$$P\left\{U=0,X\leqslant\frac{1}{2}\right\}\neq P\{U=0\}P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$$

故 U 与 X 不独立

(III) Z 的分布函数

$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{U+X\leqslant z\}=P\{U=0,U+X\leqslant z\}+P\{U=1,U+X\leqslant z\}$

$=P\{U=0,X\leqslant z\}+P\{U=1,U\leqslant z-1\}$

$=P\{X>Y,X\leqslant Z\}+P\{X\leqslant Y,X\leqslant Z-1\}$

① $z<0$，$F_Z(z)=0$

② $0\leqslant z<1$，

$F_Z(z)=P\{X>Y,X\leqslant Z\}+0=\iint\limits_{\substack{x>y\\x\leqslant z}}f(x,y)dxdy=\int_0^z dx\int_{x^2}^{x}3dy=\frac{3}{2}z^2-z^3$

③ $1\leqslant z<2$，

$F_Z(z)=P\{X>Y\}+P\{X\leqslant Y,X\leqslant Z-1\}=\frac{1}{2}+\iint\limits_{\substack{x\leqslant y\\x\leqslant z-1}}f(x,y)dxdy$

$=\frac{1}{2}+\int_0^{z-1}dx\int_x^{\sqrt{x}}3dy=\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2$

④ $z\geqslant 2$，$F_Z(z)=1$

故 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, & 0\leqslant z<1\\ \frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2, & 1\leqslant z<2,\\ 1 & z\geqslant 2,\end{cases}$$

(23)【详解】(1)因 $T=\max(X_1,X_2,X_3)$，则 T 的分布函数为

$F_T(t)=P\{T\leqslant t\}=P\{\max(X_1,X_2,X_3)\leqslant t\}=P\{X_1\leqslant t,X_2\leqslant t,X_3\leqslant t\}$

$=P\{X_1\leqslant t\}P\{X_2\leqslant t\}P\{X_3\leqslant t\}=F^3(t)$

因 X 的分布函数 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{\theta^3}x^3, & 0\leqslant x<\theta\\ 1, & x\geqslant\theta\end{cases}$$

所以，T 的分布函数

$$F_T(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \left(\frac{1}{\theta^3}t^3\right)^3, & 0\leqslant t<\theta\\ 1, & t\geqslant\theta\end{cases}=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{1}{\theta^9}t^9, & 0\leqslant t<\theta\\ 1, & t\geqslant\theta\end{cases}$$

T 的概率密度

$$f_T(t)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^9}t^9, & 0\leqslant t<\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$$

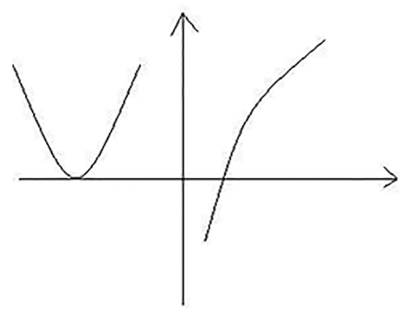
(2)要使 aT 为 θ 的无偏估计，则 $E(a\theta)=\theta$，即 $aE(\theta)=\theta$

可得 $a=\frac{\theta}{E(T)}$ 又 $E(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}tF_t(t)dt=\int_0^\theta\frac{1}{\theta^9}t^8dt=\frac{9}{10}\theta$

代入 $a=\frac{\theta}{E(T)}$，解得 $a=\frac{10}{9}$.

2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题详解

(1)【答案】(C)



【详解】对于连续函数的曲线而言，拐点处的二阶导数等于零或者不存在.从图上可以看出有两个二阶导数等于零的点，以及一个二阶导数不存在的点 $x=0$.但对于这三个点，最左边的二阶导数等于零的点的两侧二阶导数都是正的，所以对应的点不是拐点.而另外两个点的两侧二阶导数是异号的，对应的点才是拐点，所以应该选(C)

(2)【答案】(A)

【详解】特解 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^{x}$，则

$$y'=e^{2x}+\left(x+\frac{2}{3}\right)e^{x}\ ,\ y''=2e^{2x}+\left(x+\frac{5}{3}\right)e^{x}$$

代入微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$，整理得

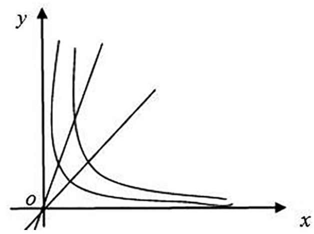
$$\left(2+a+\frac{b}{2}\right)e^{2x}+(1+a+b)xe^{x}+\left(\frac{5}{3}+\frac{2a}{3}-\frac{b}{3}\right)e^{x}=ce^{x}$$

解得 $a=-3,b=2,c=-1$.故选(A)

(3)【答案】(A)

【详解】因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=2$ 处条件收敛，所以 $R=2$，由幂级数的性质，$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的收敛半径也为 $R=2$，即 $|x-1<3$，收敛区间为 $-1<x<3$，则收敛域为 $-1<x<3$，进而 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的收敛点，收敛点，故选(A)

(4)【答案】(B)



【详解】先画出区域 D,如图所示。转化为极坐标表示即可,即

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdr$$

选择(B).

(5)【答案】(D)

【详解】因为,

$$x,y,z\text{ 有无穷多解 }(0,1)\ r(A)=r(\bar{A})<3,$$

得 $|A|=0$。即 $dz|_{(0,1)}=-dx$,从而 $a=1$ 或 $a=2$

当 $a=1$ 时,

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\1&2&1&\vdots&\alpha\\1&4&1&\vdots&\alpha^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\0&1&0&\vdots&\alpha-1\\0&0&0&\vdots&\alpha^2-3\alpha+2\end{pmatrix}$$

从而 $\alpha^2-3\alpha+2=0\Rightarrow\alpha=1$ 或 $\alpha=2$ 时 x,y,z 有无穷多解

当 $a=2$ 时,

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\1&2&2&\vdots&\alpha\\1&4&4&\vdots&\alpha^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1\\0&1&1&\vdots&\alpha-1\\0&0&0&\vdots&\alpha^2-3\alpha+2\end{pmatrix}$$

从而 $\alpha^2-3\alpha+2=0\Rightarrow\alpha=1$ 或 $\alpha=2$ 时 x,y,z 有无穷多解

所以选(D)

(6)【答案】(A)

【详解】由已知得

$$f(x_1,x_2,x_3)=Y^TP^TAPY=2y_1^2+y_2^2-y_3^2,Q=PE_{23}E_2(-1),$$

从而

$$f(x_1,x_2,x_3)=Y^TQ^TAQY=Y^TE_2^T(-1)E_{23}{}^TP^TAPE_{23}E_2(-1)Y$$

$$=Y^TE_2(-1)E_{23}P^TAPE_{23}E_2(-1)Y-2y_1^2-y_2^2+y_3^2,$$

其中 $E_{23}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$, $E_2(-1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 均为初等矩阵,所以选(A).

(7)【答案】(C)

【详解】排除法.若 $AB=\Phi$,则 $P(AB)=0$,而 $P(A)$,$P(B)$ 未必为 0,故

$$P(A)P(B)\geqslant P(AB),\frac{P(A)+P(B)}{2}\geqslant P(AB),$$

故 (B)，(D) 错.若 $A\subset B$，则 $P(AB)=P(A)\geqslant P(A)P(B)$，故 (A) 错.

(8)【答案】(D)

【详解】

$$\begin{aligned}E[X(X+Y-2)]&=E[X^2+XY-2X]\\&=E(X^2)+E(XY)-2E(X)\\&=D(X)+E^2(X)+E(X)E(Y)-2E(X)=5\end{aligned}$$

(9)【答案】$-\dfrac{1}{2}$

【详解 1】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{2x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=-\dfrac{1}{2}$

【详解 2】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{x^2}{2}}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

(10)【答案】$\dfrac{\pi^2}{4}$

【详解】

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)dx&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|x|dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx+2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}xdx\\&=0+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

(11)【答案】$-dx$

【详解】对

$$e^z+xyz+x+\cos x=2$$

两边分别关于 x,y 求偏导，得到

$$e^z\frac{\partial z}{\partial x}+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}+1-\sin x=0$$

$$e^z\frac{\partial z}{\partial y}+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

并将 $(0,1)$ 代入，得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}=-1,\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}=0,$$

所以

$$dz|_{(0,1)}=\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,1)}dx+\frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,1)}dy=-dx\ .$$

(12)【答案】$\frac{1}{4}$

【详解】由轮换对称性，可得

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=6\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=6\int_0^1 zdz\iint\limits_{D_Z}dxdy,$$

其中，D_Z 为平面 $z=z$ 截空间区域 Ω 所得的截面，其面积为 $\frac{1}{2}(1-z)^2$ 所以，

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=6\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=6\int_0^1 z\,\frac{1}{2}(1-z)^2dz$$

$$=3\int_0^1(z^3-2z^2+z)dz=\frac{1}{4}$$

(13)【答案】$2^{n+1}-2$

【详解】按第一行展开得

$$D_n=\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=2D_{n-1}+(-1)^{n+1}2(-1)^{n-1}$$

$$=2D_{n-1}+2=2(2D_{n-2}+2)+2=2^2D_{n-2}+2^2+2=2^n+2^{n-1}+\cdots+2=2^{n+1}-2$$

(14)【答案】$\frac{1}{2}$.

【详解】由 $\rho_{XY}=0$，故 X,Y 独立；所以，

$$P\{XY-Y<0\}=P\{(X-1)Y<0\}$$

$$=P\{(X-1)<0,Y>0\}+P\{(X-1)>0,Y<0\}$$

$$=P\{(X-1)<0\}P\{Y>0\}+P\{(X-1)>0\}P\{Y<0\}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

(15)【详解】由题意，$f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to0$ 时为等价无穷小，所以，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

即

$$1=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+bx\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{kx^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a+1)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3)}{kx^3}$$

得，

$$a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}$$

(16)【详解】曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

即

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

由该切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4 可得，

$$\frac{1}{2}\left|x_0-\left(\frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}+x_0\right)\right|\,|f(x_0)|=\frac{1}{2}\frac{f^2(x_0)}{f'(x_0)}=4$$

整理可得微分方程，$\frac{y^2}{8}=\frac{dy}{dx}$　分离变量可解得，$-\frac{1}{y}=\frac{1}{8}x+c$

因为 $y(0)=2$，代入 $-\frac{1}{y}=\frac{1}{8}x+c$ 可得 $c=-\frac{1}{2}$

解得，$y=\frac{8}{4-x}$　　因此，$f(x)=\frac{8}{4-x}$

(17)【详解】因为 $f(x,y)$ 沿着梯度的方向的方向导数最大，且最大值为梯度的模。

又

$$f'_x(x,y)=1+y,f'_y(x,y)=1+x,$$

则 $grad f(x,y)=\{1+y,1+x\}$，则 $|grad f(x,y)|=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$，

此题目转化为对函数

$g(x,y)=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$ 在约束条件 $C:x^2+y^2+xy=3$，下的最大值

即为条件极值问题.本问题可以转化为对

$d(x,y)=(1+y)^2+(1+x)^2$ 在约束条件　$C:x^2+y^2+xy=3$，下的最大值，构造函数

$f(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$

令

$$\begin{cases} F'_x = 2(1+x)+\lambda(2x+y)=0 \\ F'_y = 2(1+y)+\lambda(2y+x)=0 \\ F'_\lambda = x^2+y^2+xy-3=0 \end{cases}$$

解得，

$$M_1(1,1), M_2(-1,-1), M_3(2,-1), M_4(-1,2),$$

所以

$$d(M_1)=8, d(M_2)=0, d(M_3)=9, d(M_4)=9,$$

故最大值为 $\sqrt{9}=3$.

(18)【详解】

(I)证明：令 $F(x)=u(x)v(x)$，则

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}u(x)$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

(II) $f'(x)=u_1{}'(x)[u_2(x)\cdots u_n(x)]+u_1(x)[u_2(x)\cdots u_n(x)]'$

$= u_1{}'(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u_2{}'(x)u_3(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u_2(x)[u_3(x)\cdots u_n(x)]'$

$=\cdots$

$= u_1{}'(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u_2{}'(x)u_3(x)\cdots u_n(x) + \cdots u_1(x)u_2(x)u_3(x)\cdots u_n{}'(x)$

(19)【详解】由题意设曲线 L 参数方程为

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta, \theta: \dfrac{\pi}{2}\to-\dfrac{\pi}{2} \\ z=\cos\theta \end{cases}$$

所以，$I=\int_L (y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+(x^2+y^2)dz$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\left[-(-\sqrt{2}\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta+(1+\sin^2\theta)\sin\theta\right]d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}[-\sqrt{2}\ \sin^2\theta+\cos\theta\sin\theta+(1+\sin^2\theta)\sin\theta]d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^2\theta]d\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

(20)【详解】(Ⅰ)证明：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(2\alpha_1+2k\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_1+(k+1)\alpha_3)?\ =(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一个基，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，即 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$

$$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}$$

又因为

$$\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}=4\neq0$$

$$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}=3$$

所以 β_1,β_2,β_3 线性无关，为 R^3 的一个基

(Ⅱ)由已知可得

$$\varepsilon=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3\ ,\varepsilon\neq0$$

即

$$k_1(\beta_1-\alpha_1)+k_2(\beta_2-\alpha_2)+k_3(\beta_3-\alpha_3)=k_1(\alpha_1+2k\alpha_3)+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_1+k\alpha_3)=0$$

有非零解，

即

$$(\alpha_1+2k\alpha_3,\quad\alpha_2,\quad\alpha_1+k\alpha_3)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=0$$

有非零解

所以，

$$|\alpha_1+2k\alpha_3,\quad \alpha_2,\quad \alpha_1+k\alpha_3|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{vmatrix}=0$$

则

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{vmatrix}=0$$

解得 $k=0$

从而 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_1=0$，$k_2=0$，$k_1=-k_3$

因此，$\xi=k_1\alpha_1-k_1\alpha_3=0$，$k_1\neq 0$

(21)【详解】(I)

由

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\0&b-\lambda&0\\0&3&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(b-\lambda)=0$$

得 B 特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=b$

由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&2&-3\\-1&3-\lambda&-3\\1&-2&a-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)[\lambda^2-(a+2)\lambda+2a-3]$$

由 $A\sim B$ 则 A 与 B 有相同的特征值

解得，$a=4,b=5$

(II)由(I)得

$$A=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&4\end{bmatrix},$$

其中特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$，

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解 $(A-E)x=0$ 方程的基础解系为

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}-3\\0\\-1\end{bmatrix};$$

当 $\lambda_3=5$ 时，解 $(A-5E)x=0$ 方程的基础解系为

$$\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},$$

从而 $(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,5\alpha_3)$

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,所以令 $P=\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,即 $P=\begin{bmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$,使得

$$P^{-1}Ap=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}.$$

(22)**【详解】**(I)

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln2,x>0\\0,x\leqslant0\end{cases},$$

$$P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln2dx=\frac{1}{8}$$

所以 Y 的概率分布为

$$P\{Y=n\}=C_{n-1}^1\ \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2}=(n-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2},n=2,3\cdots$$

(II)

$$EY=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2}=\frac{1}{64}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\left(\frac{7}{8}\right)$$

令

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}\ ,\ S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}nx^{n-2}\ ,$$

则

$$S_2(x)=\int_0^x S_1(t)dt=\sum_{n=2}^{\infty}x^n=\frac{x^2}{1-x}$$

$$S_1(x)=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\ ,S(x)=S'_1(x)=\frac{2\ (1-x)^2+2x(2-x)}{(1-x)^3}$$

因此,

$$EY=\frac{1}{64}S\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{1}{64}\frac{2\left(1-\frac{7}{8}\right)^2+2\cdot\frac{7}{8}(2-\frac{7}{8})}{\left(1-\frac{7}{8}\right)^3}=16$$

(23)【详解】(I)

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_0^1 x\frac{1}{1-\theta}dx=\frac{1}{1-\theta}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1+\theta}{2}$$

解得 $\theta=2EX-1$.即，$\hat{\theta}=2\bar{X}-1$

(II)设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为观测值，则

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\theta}=\frac{1}{(1-\theta)^n} & \theta<x_i<1,i=1,2,\ldots,n\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

两边同时取对数

$$\ln L(\theta)=-n\ln(1-\theta),\theta<x_i<1,i=1,2,\ldots,n\ ,$$

对 θ 求导

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-n\frac{-1}{1-\theta}=\frac{n}{1-\theta}>0\ ,$$

所以 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}=\min\{X_i\}$.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(一)试题详解

(1)【答案】(C).

【详解】(A). $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)=\infty$,所以 $y=x+\sin x$ 无水平渐近线,又可知 $y=x+\sin x$ 无垂直渐近线,又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 极限不存在,所以 $y=x+\sin x$ 无斜渐近线,

(B). $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+\sin x)=\infty$,所以 $y=x^2+\sin x$ 无水平渐近线,又可知 $y=x^2+\sin x$ 无垂直渐近线,又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sin x}{x}=\infty$,极限不存在,所以 $y=x^2+\sin x$ 无斜渐近线,

(C). $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin\dfrac{1}{x})=\infty$,所以 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ 无水平渐近线,又可知 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ 无垂直渐近线,又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin\dfrac{1}{x}}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin\dfrac{1}{x}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$,所以 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ 有斜渐近线 $y=x$,

(D). $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+\sin\dfrac{1}{x})=\infty$,所以 $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$ 无水平渐近线,又可知 $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$ 无垂直渐近线,又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\infty$,极限不存在,所以 $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$ 无斜渐近线,

(2)【答案】(D)

【详解】$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$,实质为一条连接 $[0,f(0)]$,$[1,f(1)]$ 的直线,所以当 $f''(x)\geqslant 0$ 时, $f(x)$ 为凹的,由图形知, $f(x)\leqslant g(x)$

(3)【答案】(D).

【详解】(A). 应为 $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

(B). 应为 $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

(C). 应为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, y) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta, y) r dr$

(4)【答案】(A).

【详解】实质为傅立叶级数，

$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x dx = 0$，$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x dx = 2$，

所以 $a_1\cos x + b_1\sin x = 2\sin x$

(5)【答案】(B)

【详解 1】利用行列式性质把此行列式化为拉普拉斯形式

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = -(ad-bc)^2$$

【详解 2】按第一列展开

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix} = -ad(ad-bc) + bc(ad-bc) = -(ad-bc)^2$$

所以正确答案为 (B)

(6)【答案】(A)

【详解】 ①充分性

若向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关，令 $k=0, l=0$，得 α_1, α_2 线性无关

但 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不一定线性无关，比如若 $\alpha_3 = 0$ 时，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关。

从而任意常数 k, l，向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关不是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的充分条件。

②必要性

$$(\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3) = (\alpha_1, \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$$

令

$$C=(\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3),A=(\alpha_1,\quad\alpha_2\quad\alpha_3),B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$$

从而 $C=AB$

因为,向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,所以 $r(A)=3$

所以,$r(C)=r(AB)=r(B)=2$

因此,对于任意常数 k,l,向量组 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关

所以正确答案为(A).

(7)**【答案】**(B)

【详解】由随机事件 A 与 B 相互独立,可得

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=0.3$$

解得,$P(A)=0.6$ 所以,$P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)=0.2$

(8)**【答案】**(D)

【详解】

$$EY_1=\int_{-\infty}^{+\infty}y\ \frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]dy=\frac{1}{2}(EX_1+EX_2)$$

$$EY_2=\frac{1}{2}E(X_1+X_2)=\frac{1}{2}(EX_1+EX_2)$$

从而 $EY_1=EY_2$.

因为,随机变量 X_1 与 X_2 相互独立

所以,

$$DY_2=\frac{1}{4}D(X_1+X_2)=\frac{1}{4}(DX_1+DX_2)$$

$$EY_1{}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\ \frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]=\frac{1}{2}(EX_1^2+EX_2^2)$$

$$DY_1=EY_1^2-(EY_1)^2=\frac{1}{2}(EX_1^2+EX_2^2)-\frac{1}{4}\ (EX_1+EX_2)^2$$

$$=\frac{1}{2}(DX_1+DX_2)+\frac{1}{4}\ (EX_1-EX_2)^2$$

从而 $DY_1>DY_2$

(9)**【答案】**$2x-y-z=1$

【详解】

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|=[2x(1-\sin y)-y^2\cos x]|=2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right| = [-x^2\cos y + 2y(1-\sin x)]| = -1\ ,$$

所以切平面方程为 $2(x-1)-(y-0)-(z-1)=0$，即 $2x-y-z=1$

(10)【答案】1.

【详解】由 $f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$　可解得

$$f(x)=x^2-x+c\ ,\ x\in[0,2]$$

又因为 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(0)=0$　代入 $f(x)=x^2-x+c$，

解得，$c=0$；所以，$f(x)=x^2-x$

另一方面，$f(x)$ 是周期为 4 的奇函数，则 $f(7)=f(-1)=-f(1)$

因此，$f(7)=1$

(11)【答案】$y=xe^{2x+1}$.

【详解】由 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 得 $\dfrac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}}-\ln\dfrac{y}{x}=0$，

令 $\dfrac{y}{x}=u$ 得 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，代入齐次方程得 $\dfrac{u+x\frac{du}{dx}}{u}-\ln u=0$，

整理得

$$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}\ ,$$

两边同时积分得

$$\int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{dx}{x}\ ,$$

所以 $\ln|\ln u-1|=\ln|x|+C$，即 $\ln u=Cx+1$，所以 $u=\dfrac{y}{x}=e^{Cx+1}$ ，

所以 $y=xe^{Cx+1}$，又 $y(1)=e^3$，得 $C=2$，所以 $y=xe^{2x+1}$

(12)【答案】π .

【详解】令 $x=\cos\theta,y=\sin\theta$，得 $z=-\sin\theta$，代入 $\oint_L zdx+ydz$ 得

$$\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta)d\theta=\pi$$

(13)【答案】$[-2,2]$

【详解】二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$$

从而知其三个特征值之和为 0

又因为其负惯性指数为 1，所以 $|A|\leqslant 0$，即 $|A|=a^2-4\leqslant 0\Rightarrow -2\leqslant a\leqslant 2$

(14)【答案】$\dfrac{3}{8n}$

【详解】$EX_i^{\ 2}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{2\theta}x^2\ \dfrac{2x}{3\theta^2}dx=\dfrac{8}{3}\theta^2$

从而 $E\left[c\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_i^{\ 2}\right]=cE\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_i^{\ 2}\right]=cn\ \dfrac{8}{3}\theta^2=\theta^2$

解得，$c=\dfrac{3}{8n}$

(15)【答案】$\dfrac{1}{2}$

【详解】

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x\right]=\lim_{t\to0^+}\left[\left(\frac{1}{t}\right)^2(e^t-1)-\frac{1}{t}\right]$$

$$=\lim_{t\to0^+}\left[\frac{(e^t-1)-t}{t^2}\right]=\frac{1}{2}$$

(16)【答案】$f(u)=\dfrac{1}{4}u(e^{2u}-1)$.

【详解】对 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 两边关于 x 求导得，$3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0$，

得 $y'=-\dfrac{2xy+y^2}{3y^2+2xy+x^2}$，令 $y'=-\dfrac{2xy+y^2}{3y^2+2xy+x^2}=0$ 得，$y=0$ 或 $y=-2x$ 将，$y=0$ 代入原方程矛盾，所以 $y=-2x$，代入 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 得 $x=1$，此时 $y=-2$，对 $3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0$

两边关于 x 求导得，

$$6y\,(y')^2+3y^2y''+2yy'+2(xy)'y'+2xyy''+2y+4xy'+x^2y''=0$$

将 $x=1$，$y=-2$，$y'(1)=0$ 代入上式得，$y''(1)=\dfrac{4}{9}$，所以 $x=1$ 为 $y=f(x)$ 以极小值

点，极小值为 $y=-2$

(17)【答案】$f(u)=\frac{1}{4}u(e^{2u}-1)$．

【详解】由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-f'(e^x\cos y)e^x\sin y\ ,$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\ \cos^2 y+f'(e^x\cos y)e^x\cos y\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\sin^2 y-f'(e^x\cos y)e^x\cos y$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$$

得

$$f''(e^x\cos y)=4z+e^x\cos y=4f(e^x\cos y)+e^x\cos y$$

所以 $f''(u)=4f(u)+u$，对应的微分方程为 $y''-4y=x$，为二阶非齐次线性微分方程，其齐次通解为 $Y(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}$，非齐次特解为 $Y^*(x)=ax+b$ 代入原微分方程得 $a=-\frac{1}{4}$，$b=0$，所以 $Y^*(x)=-\frac{1}{4}x$，所以非齐次通解 $y(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}-\frac{1}{4}x$，由 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，得 $C_1=0$，$C_2=\frac{1}{4}$，所以 $y(x)=\frac{1}{4}x(e^{2x}-1)$，即 $f(u)=\frac{1}{4}u(e^{2u}-1)$.

(18)【答案】-4π．

【详解】由高斯公式，补面：$z=1$，$x^2+y^2\leqslant 1$ 取下侧，则

$$\iint_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$$

$$=-\iiint_{\Omega}[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]\,dv-\iint_{\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy=-4\pi$$

(19)【详解】(1)因为

$$0\leqslant\frac{a_n}{b_n}=\frac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}\leqslant\frac{1-\cos b_n}{b_n}\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos b_n}{b_n}=0$$

由夹逼准则，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，由比较判别法，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。因此，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

(2)由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1-\cos b_n}{b_n}}{b_n}=\dfrac{1}{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,由比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-\cos b_n}{b_n}$ 收敛

而

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}\leqslant\frac{1-\cos b_n}{b_n}$$

所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛

(20)**【详解】**(Ⅰ) $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$

从而同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=2x_4\\x_3=3x_4\end{cases}$；所以方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\alpha=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$

(Ⅱ)令 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，则

$$(A\vdots\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right)$$

所以

$Ax=\beta_1$ 的一个特解为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}$；$Ax=\beta_2$ 的一个特解为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}$；

$$Ax=\beta_3\text{ 的一个特解为 }\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

所以

$$B=\begin{pmatrix}-k_1+2 & -k_2+6 & -k_3-1\\ 2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1\\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix},(k_1,k_2,k_3\in R)$$

(21)【详解】令

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

则

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda-n)=0$$

解得，$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$

因为 $A^T=A$，即 A 为实对称矩阵，所以 A 可相似对角化，

即 $A\sim\Lambda$，其中 $\Lambda=\begin{pmatrix}n-1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & \cdots & -1\\ 0 & \lambda & \cdots & -2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-n\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda-n)=0$$

解得，$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$

当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$ 时，$-B=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & -1\\ 0 & 0 & \cdots & -2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$

即 $r(-B)=1$。所以 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$ 对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量

从而 B 可相似对角化，即 $B\sim\Lambda$，其中 $\Lambda=\begin{pmatrix} n-1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 所以 A 与 B 相似

(22)【详解】(Ⅰ)

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{Y\leqslant y,X=1\}+P\{Y\leqslant y,X+2\}$$
$$=P\{Y\leqslant y/X=1\}P\{X=1\}+P\{Y\leqslant y/X=1\}P\{X=2\}$$
$$=\frac{1}{2}[P\{Y\leqslant y/X=1\}+P\{Y\leqslant y/X=1\}]$$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；　当 $0\leqslant y<1$ 时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}\left(y+\frac{y}{2}\right)=\frac{3}{4}y$

当 $1\leqslant y<2$ 时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right)$；　当 $y\geqslant 2$ 时，$F_Y(y)=1$

所以

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<0 \\ \frac{3}{4}y, & 0\leqslant y<1 \\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right), & 1\leqslant y<2 \\ 1, & y\geqslant 2 \end{cases}$$

(Ⅱ)由 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 得到概率密度为

$$f(y)=F'_Y(y)=\begin{cases} \frac{3}{4}, & 0\leqslant y<1 \\ \frac{1}{4}, & 1\leqslant y<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)dy=\int_0^1 y\,\frac{3}{4}dy+\int_1^2 y\,\frac{1}{4}dy=\frac{3}{4}$

(23)【详解】(Ⅰ)由 X 的分布函数 $F(x)$ 得到概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}, x\geqslant 0 \\ 0, x<0 \end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\,\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\theta$$

（Ⅱ）最大似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)\begin{cases}\left(\frac{2}{\theta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}x_ie^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}, & x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

对于 $x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$ 时，$\ln L(\theta)=n(\ln 2-\ln\theta)+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$

对 θ 求导得 $\ln L'(\theta)=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i$

令其等于 0，得到 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

从而 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

（Ⅲ）$E\hat{\theta}=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2\right)=EX^2=\theta$

所以存在实数 $a=\theta$，使得对任何 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}-a|\geqslant\varepsilon)=0$.

2013年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题详解

(1)【答案】(D)

【详解】由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3))}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3}{x^k}=c$

所以 $k=3, c=\dfrac{1}{3}$.

(2)【答案】(A)

【详解】设

$$F(x,y,z)=x^2+\cos xy+yz+x$$

则

$F_x(x,y,z)=2x-y\sin xy+1$, $F_y(x,y,z)=-x\sin xy+z$, $F_z(x,y,z)=y$

所以 $F_x(0,1,-1)=1$;　$F_y(0,1,-1)=-1$;　$F_z(0,1,-1)=1$

所以该曲面在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面为 $x-(y-1)+(z+1)=0$

即 $x-y+z=-2$;故选(A).

(3)【答案】(C)

【详解】将函数 $f(x)$ 奇延拓,得周期函数 $F(x)$,周期为2,则 $F(x)$ 在点 $x=-\dfrac{9}{4}$ 处连续

所以

$$S(-\frac{9}{4})=F(-\frac{9}{4})=F(-\frac{1}{4})=f(-\frac{1}{4})=-f(\frac{1}{4})=-\frac{1}{4},$$

故选(C).

(4)【答案】(D)

【详解】利用格林公式可得

$$I_i=\iint\limits_{D_i}(1-x^2-\frac{y^2}{2})dxdy\ ,其中\ i=1,2,3,4$$

利用二重积分的几何意义，比较积分区域以及被积函数在积分区域的正负.在区域 D_1,D_4 上，被积函数 $1-x^2-\frac{y^2}{2}>0$.则在 D_1,D_4 上，积分区域大的积分值大.所以，$I_4>I_1$.在 D_4 外被积函数为负，所以 $I_4>I_2$，$I_4>I_3$.因此正确答案为(D).

(5)【答案】(B)

【详解】由已知 $AB=C$，即

$$A(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

得 $Ab_i=c_i(i=1,2,\cdots,n)$，即 C 的每一列向量可由 A 的列向量组线性表示.

因为 B 为可逆矩阵，从而 $A=CB^{-1}$；同理可得 A 的每一列向量可由 C 的列向量组线性表示.

故 A 的列向量组与 C 的列向量组等价，正确选项为(B)

(6)【答案】(B)

【详解】由 $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 为实对称矩阵，$B=\begin{pmatrix}2&&\\&b&\\&&0\end{pmatrix}$ 为对角矩阵.

对称矩阵 A 与 B 相似的充分必要条件是特征值都相同.而 B 的特征值为 $2,b,0$

由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&a&1\\a&b-\lambda&a\\1&a&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda\left[2a^2-(\lambda-2)(\lambda-b)\right]=0$$

可得 A 的特征值为 $2a^2+2,b,0$，从而 $a=0$，b 为任意实数，正确选项为(B)

(7)【答案】(A)

【详解】$X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim N(0,2^2)$，$X_3\sim N(5,3^2)$，

$$p_1=P\{-2<X_1<2\}=P\{|\frac{X_1-0}{0}|<2\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1;$$

$$p_2=P\{-2<X_2<2\}=P\{|\frac{X_2-0}{0}|<1\}=2\Phi(1)-1;$$

$$p_3=P\{-2<X_3<2\}=P\{-\frac{7}{3}<\frac{X_3-5}{3}<-1\}=\Phi(-1)-\Phi(-\frac{7}{3});$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数.

根据标准正态分布概率密度的函数图图像的单调性及对称性可知，$p_1>p_2>p_3$

(8)【答案】(C)

【详解】根据 F 分布的性质，$X \sim t(n) \Rightarrow X^2 \sim F(1,n)$，从而 X^2，Y 服从同一分布. 由(t)分

布概率密度函数图像的对称性，知

$$P\{X > c\} = P\{X < -c\} = \alpha$$

故

$$P\{Y > C^2\} = P\{X^2 > C^2\}$$
$$= P\{X > C \text{ 或 } X < -C\} = P\{X > C\} + P\{X < -C\} = 2\alpha$$

(9)【答案】1

【详解】$\lim\limits_{n\to\infty} n(f(\frac{1}{n}) - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(\frac{1}{n}) - 1}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n}} = f'(0)$

对方程 $y - x = e^{x(1-y)}$ 两边关于 x 进行求导得

$$y' = \frac{(1-y)e^{x(1-y)} + 1}{1 + xe^{x(1-y)}}$$

则 $y'|_{\substack{x=0\\y=1}} = 1$　　即 $f'(0) = 1$；

(10)【答案】$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - xe^x$

【详解】根据题意可知，对应的齐次微分方程的 2 个线性无关的解为 e^{3x}，e^x，所以齐次微分方程的通解为

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x$$

所以，非齐次通解

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x - xe^{2x}$$

(11)【答案】$\sqrt{2}$

【详解】

$$\frac{dy}{dt} = t\cos t\ ,\ \frac{dx}{dt} = \cos t\ ;\ \frac{dy}{dx} = \frac{t\cos t}{\cos t} = t\ ;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dt}(t) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\cos t}\ ,$$

则

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

(12)【答案】ln2

【详解】

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx\ ,$$

又

$$\int_1^t\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\int_1^t\ln x d(\frac{1}{1+x})=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^t+\int_1^t\frac{1}{1+x}\frac{1}{x}dx$$

$$=-\frac{\ln t}{1+t}+\int_1^t(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x})dx=-\frac{\ln t}{1+t}+\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|\Big|_1^t=-\frac{\ln t}{1+t}+\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|+\ln2$$

所以

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=\lim_{t\to+\infty}(-\frac{\ln t}{1+t}+\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|+\ln2)=\ln2$$

(13)【答案】-1

【详解】由已知 $A_{ij}+a_{ij}=0$,得 $A_{ij}=-a_{ij}$,即 $A^*=-A^T$

两边取行列式得

$$|A^*|=|-A^T|\Rightarrow|A^*|=-|A|$$

又因为

$$|A^*|=|A|^{n-1}=|A|^2$$

从而 $|A|^2=-|A|$　　解得,$|A|=0,-1$

由 $A^*=-A^T$　得,$A^TA=-|A|E$

若 $|A|=0$,则 $A^TA=0$,与已知 A 为三阶非零矩阵相矛盾

故 $|A|=-1$

(14)【答案】$1-w^{-1}$

【详解】根据指数分布的分布函数 $F(x)$ 及条件概率公式,有

$$P\{X\leqslant a+1\mid Y>a\}=\frac{P\{a<Y\leqslant a+1\}}{P\{Y>a\}}=\frac{F(a+1)-F(a)}{1-F(a)}=1-e^{-}1$$

(15)【详解】

$$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1f(x)d\sqrt{x}=2(\sqrt{x}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\sqrt{x}df'(x))$$

$$=2f(1)-2\int_0^1\sqrt{x}\cdot\frac{\ln(x+1)}{x}dx=-2\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}dx$$

$$=-4\int_0^1\ln(x+1)d\sqrt{x}=-4(\sqrt{x}\ln(x+1)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx)$$

$$=-4\ln2+4\int_0^1\frac{2t^2}{t^2+1}dt=-4\ln2+8\int_0^1(1-\frac{1}{t^2+1})dt$$

$$=-4\ln 2+8(t-\arctan t)\Big|_0^1=-4\ln 2+8-2\pi$$

(16)【详解】(I)由题意得

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

$$s''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^{n-2}$$

由于

$$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0\quad(n\geqslant 2)$$

所以

$$a_n=(n+1)(n+2)a_{n+2}(n=0,1,2,\cdots)$$

故

$$s''(x)=s(x)$$

(II)解微分方程 $s''(x)=s(x)$，其方程为二阶常系数齐次线性微分方程，其特征方程 $r^2-1=0$

则

$$r_{1,2}=\pm 1$$

所以该微分方程的通解为

$$s(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x$$

由

$$s(0)=a_0=3,s'(0)=a_1=1$$

得

$$\begin{cases}C_1+C_2=3\\-C_1+C_2=1\end{cases}$$

解得，$C_1=1,C_2=2$　所以 $s(x)=e^{-x}+2e^x$

(17)【详解】令

$$\begin{cases}f'_x=x^2e^{x+y}+f=0\\f'_y=e^{x+y}+f=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=-1\\y=-\dfrac{2}{3}\end{cases},\begin{cases}x=1\\y=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

又

$$f''_{xx}=2xe^{x+y}+x^2e^{x+y}+f_x,\ f''_{xy}=x^2e^{x+y}+f_y,\ f''_{xy}=e^{x+y}+f_y$$

则，在点 $(-1,-\frac{2}{3})$ 处，

$$A=-e^{-\frac{5}{3}},B=e^{-\frac{5}{3}},C=e^{-\frac{5}{3}}$$

得 $AC-B^2=-2e^{-\frac{10}{3}}<0$；所以此点不是极值点.

在点 $(1,-\frac{4}{3})$ 处，

$$A=3e^{-\frac{1}{3}},B=e^{-\frac{1}{3}},C=e^{-\frac{1}{3}}$$

$AC-B^2=2e^{-\frac{2}{3}}>0$，且 $A>0$ 所以此点是极小值点，极小值为 $f(1,-\frac{4}{3})=-e^{-\frac{1}{3}}$

(18)【详解】(Ⅰ)做辅助函数

$$F(x)=f(x)-x,x\in[0,1]$$

由题意得 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，又 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(0)=0$，故

$$F(0)=f(0)-0$$

又 $f(1)=1$，所以

$$F(1)=f(1)-1=0$$

故 $F(0)=F(1)$.由罗尔定理得在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $F'(\xi)=0$ 即 $f'(\xi)=\xi$

(Ⅱ)做辅助函数

$$G(x)=e^x(f'(x)-1),x\in[-1,1]$$

所以 $G(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，在 $(-1,1)$ 可导，

由(1) $f'(\xi)=1$ 知，$G(\xi)=0$

又 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f'(x)$ 是偶函数.故 $f'(-\xi)=1$

所以 $G(-\xi)=0=G(\xi)$. $G(x)$ 在 $[-\xi,\xi]$ 上满足罗尔定理，

所以在 $(-\xi,\xi)$ 上至少存在一点 η 使得 $G'(\eta)=0$ 即

$f''(\eta)+f'(\eta)=1$

(19)【详解】(1) $\overrightarrow{AB}=\{-1,1,1\}$，

所以 L：

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$$

设 $M(x,y,z)\in\sum$，对应于 L 上的点 $M_0(x_0,y_0,z)$ 则 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$

又 $\begin{cases}x_0=1-z\\y_0=z\end{cases}$ 得 Σ：$x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$

(2)显然 $\bar{x}=0,\bar{y}=0,\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\,dv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}$;

$$\iiint\limits_{\Omega} dv=\int_0^2 dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z^2-2z+1} dxdy=\pi\int_0^2(2z^2-2z+1)dz=\frac{10}{3}\pi$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,dv=\int_0^2 z\,dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z^2-2z+1} dxdy=\pi\int_0^2(2z^3-2z^2+z)dz=\frac{14}{3}\pi$$

故 $\bar{z}=\dfrac{7}{5}$.所以形心坐标为 $\left(0,0,\dfrac{7}{5}\right)$.

(20)【详解】设矩阵

$$C=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

则

$$AC=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+ax_3 & x_2+ax_4 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

$$CA=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+x_2 & ax_1 \\ x_3+x_4 & ax_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}AC-CA&=\begin{pmatrix} x_1+ax_3 & x_2+ax_4 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x_1+x_2 & ax_1 \\ x_3+x_4 & ax_3 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} -x_2+ax_3 & -ax_1+x_2+ax_4 \\ x_1-x_3-x_4 & x_2-ax_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

由 $AC-CA=B$,得

$$\begin{cases} -x_2+ax_3=0 \\ -ax_1+x_2+ax_4=1 \\ x_1-x_3-x_4=1 \\ x_2-ax_3=b \end{cases}$$

此为 4 元非齐次线性方程组,欲使得矩阵 C 存在,则此非齐次线性方程组必有解,从而增广矩阵

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & b \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}$$

所以当 $1+a=0,b=0$，即 $a=-1,b=0$ 时，非齐次线性方程组有解，存在矩阵 C，使得 $AC-CA=B$

又

$$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1+c_2+1\\-c_1\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

所以

$$C=\begin{pmatrix}c_1+c_2+1&-c_1\\c_1&c_2\end{pmatrix}(c_1,c_2\text{ 为任意实数})$$

(21)**【详解】**（Ⅰ）$f(x_1,x_2,x_3)=2(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$

$$=2\left[(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]+\left[(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]$$

$=X^T(2\alpha\alpha^T)X+X^T(\beta\beta^T)=X^T(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)X$

故二次型 f 对应的矩阵 $A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$

（Ⅱ）因为 α,β 正交且都为单位向量，即

$$\beta^T\alpha=0,\alpha^T\beta=0,\alpha^T\alpha=1,\beta^T\beta=1$$

故 $A\alpha=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\alpha=2\alpha$

从而矩阵 A 的其中一个特征值为 $\lambda_1=2$

同理可得 $A\beta=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\beta=\beta$，即矩阵 A 的其中一个特征值为 $\lambda_2=1$

又因为 $r(\alpha\alpha^T)=1,r(\beta\beta^T)=1$　所以 $r(A)=r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\leqslant 2$

从而矩阵 A 的其中一个特征值为 $\lambda_3=0$

故若 α,β 正交且都为单位向量，二次型 f 经正交变换后的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$

(22)**【详解】**（Ⅰ）由 X 的概率分布函数

$$F_X(+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^3\frac{1}{a}x^2dx=1$$

解得，$a=9$

由 Y 的概率分布函数 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}$ 可知，

当 $y<1$，

$F_Y(y)=0$；当 $y\geqslant 2$，$F_Y(y)=1$；

$$F_Y(y)=P\{y\leqslant y\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y<y\}$$

当 $1\leqslant y<2$，$=P\{X\geqslant 2\}+P\{1<X<y\}$

$=P\{X\geqslant 2\}+P\{1<X<y\}=\int_2^3\frac{1}{9}x^2dx+\int_1^y\frac{1}{9}x^2dx=\frac{1}{27}(y^3+18)$.

所以，$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \frac{1}{27}(y^3+18), & 1\leqslant y<2\\ 1, & y\geqslant 2\end{cases}$

（Ⅱ）由 X 的概率分布函数

$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{27}x^3, & 1\leqslant x<3\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}$

所以，$F_X(y)=P\{X\leqslant y\}=\int_{-\infty}^{y}f(t)dt=\begin{cases}0, & y\leqslant 0\\ \frac{1}{27}y^3, & 0\leqslant y<3\\ 1, & \mathrm{y}\geqslant 3\end{cases}$

(23)**【详解】**（Ⅰ）令

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_0^{+\infty}\frac{\theta^2}{x^2}e^{-\frac{\theta}{x}}dx=\theta=\bar{X}$$

所以，θ 矩估计量为 $\bar{X}$.

（Ⅱ）似然函数

$$L((\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\frac{\theta^{2n}}{(x_1x_2\ldots x_n)^3}e^{-\theta\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{xi}}, & x_i>0\\ 0, & \text{other}\end{cases}$$

当 $x_i>0$，令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，得 $\theta=\frac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$，所以 θ 的最大似然估计量为 $\frac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$.

2012 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(一)试题详解

(1)【答案】(C)

【详解】$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$,有 1 条垂直渐近线;

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$,有 1 条水平渐近线;

(2)【答案】(A)

【详解】由已知 $f(0)=0$,则

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)=(^-1)n-1(n-1)!$

(3)【答案】(B)

【详解】由已知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在,又连续,则 $f(0,0)=0$;且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x^2}$ 存在,于是

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0\ ,\ f_x(0,0)=0\ ,$$

同理可得 $f_y(0,0)=0$,

于是由可微定义

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

于是,可微。应选(B).

(4)【答案】(D).

【详解】$I_1=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin x dx>0$,

$I_2=\int_0^{2\pi}e^{x^2}\sin x dx=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin x dx-\int_0^{\pi}e^{(x+\pi)^2}\sin x dx=I_1-\int_0^{\pi}e^{(x+\pi)^2}\sin x dx<0$

$$I_3=\int_0^{3\pi} e^{x^2}\sin x dx=I_2+\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x dx$$

$$=\int_0^{\pi} e^{x^2}\sin x dx-\int_0^{\pi} e^{(x+\pi)^2}\sin x dx+\int_0^{\pi} e^{(x+2\pi)^2}\sin x dx$$

$$=I_1+\int_0^{\pi}(e^{(x+2\pi)^2}-e^{(x+\pi)^2})\sin x dx$$

(5)【答案】(C).

【详解】由 $\alpha_3+\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\c_5\end{pmatrix}$ 必与 α_1 线性相关,从而 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关,故应选(C).

(6)【答案】(B).

【详解】由题设,

$$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

从而

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

故应选(B).

(7)【答案】(A)

【详解】因为随机变量随机变量 X 和 Y 相互独立,且分别服从参数为 1 和参数为 4 的指数分布,即

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x},x\geqslant 0\\0,\text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y\geqslant 0\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

所以 X 和 Y 的联合概率分布为:

$$f(x,y)=\begin{cases}4e^{-x-4y}, & x,y\geqslant 0\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

则 $P(x<y)=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}4e^{-x-4y}dy=\frac{1}{5}$

(8)【答案】(D)

【详解】设截成两段的长度分别为 X 与 Y,则 $X+Y=1$,即 $Y=1-X$,也就是说 X 与 Y 存在确定的线性关系,所以 X 与 Y 的相关系数的绝对值为 1,而 X 的系数小于 0,则 X 与 Y

的相关系数为 -1.

(9)【答案】$f(x)=e^x$

【详解】$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的通解为 $C_1e^{-2x}+C_2e^x$；

$f'(x)+f(x)=2e^x$ 的通解为 $e^{-x}(e^{2x}+C)$，于是，函数为 $f(x)=e^x$.

(10)【答案】$\frac{\pi}{2}$

【详解】$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_0^{\pi}(\cos t+1)\sin^2 t\,dt=\frac{\pi}{2}$

(11)【答案】$(1,1,1)$

【详解】$\frac{\partial\left(xy+\frac{z}{y}\right)}{\partial x}=y$，$\frac{\partial\left(xy+\frac{z}{y}\right)}{\partial y}=x-\frac{z}{y^2}$，$\frac{\partial\left(xy+\frac{z}{y}\right)}{\partial z}=\frac{1}{y}$，梯度公式代入点 $(2,1,1)$ 可得出答案.

(12)【答案】$\frac{\sqrt{3}}{12}$

【详解】投影到 xoy 平面上，

$$\iint_{\Sigma} y^2dS=\iint_{D} y^2\sqrt{3}\,dxdy=\sqrt{3}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} y^2dx=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

(13)【答案】2.

【详解】

由 α 为三维单位向量，知矩阵 $\alpha\alpha^T$ 的秩为 1，特征值为 1,0,0，从而 $E-\alpha\alpha^T$ 特征值为 0,1,1.

由于 $E-\alpha\alpha^T$ 为实对称矩阵，又实对称矩阵的秩等于非零特征值的个数，故 $E-\alpha\alpha^T$ 的秩为 2.

(14)【答案】$\frac{3}{4}$

【详解】因为 A 与 C 互不相容，即 $AC=\varphi$， 又因为 $A=AC+A\bar{C}$

所以 $A\bar{C}=A$ 从而 $AB\bar{C}=AB$

则

$$P(AB\mid\bar{C})=\frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}=\frac{P(AB)}{1-P(C)}=\frac{3}{4}$$

(15)【详解】令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，则 $f(0)=0$

$f(x)$ 为偶函数,我们只需证明 $0<x<1$,$f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}>0$

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)-\sin x-x\ ,$$

$f''(x)=2\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}\right)+x\left(-\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}\right)-\cos x-1$

$=\dfrac{4}{1-x^2}+x\left(-\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}\right)-\cos x-1$

由 $0<x<1$ 可得,

$\dfrac{4}{1-x^2}>4$, $x\left(-\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}\right)>0$, $-2\leqslant-\cos x-1\leqslant-1$;

所以当 $0<x<1$, $f''(x)>0$.

因此,当 $0<x<1$ 时 $f'(x)$ 单调递增。而 $f'(0)=0$,所以 $f'(x)>f'(0)=0$.

得出 $f(x)$ 为增函数,又由 $f(0)=0$,得出 当 $0<x<1$,

$$f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}>0$$

即 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x>1+\dfrac{x^2}{2}$

(16)**【详解】** 令

$$\begin{cases} f'_x=e^{-\frac{x2+y2}{2}}(1-x^2)=0 \\ f'_y=-xye^{-\frac{x2+y2}{2}}=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=0, \end{cases}\quad \begin{cases} x=-1. \\ y=0. \end{cases}$$

$$A=f''_{xx}=-xe^{-\frac{x2+y2}{2}}(1-x^2)-2xe^{-\frac{x2+y2}{2}}\ ,B=f''_{xy}=-ye^{-\frac{x2+y2}{2}}(1-x^2)\ ,$$

$$C=f''_{yy}=xe^{-\frac{x2+y2}{2}}(-1+y^2)$$

分别把 $\begin{cases} x=1, \\ y=0, \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=-1. \\ y=0. \end{cases}$ 代入 A,B,C 中可知

$$\begin{cases} x=1, \\ y=0, \end{cases}$$

为函数的极大值点,极大值为 $e^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{cases} x=-1, \\ y=0, \end{cases}$$

是极小值点,极小值为 $-e^{-\frac{1}{2}}$

(17)**【详解】** 利用比值法有

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{2(n+1)}}{a_n x^{2n}}\right|=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}\times\frac{2n+1}{4n^2+4n+3}x^2\right|=x^2$$

令 $x^2<1$ 得 $-1<x<1$

当 $x=\pm1$ 时,原级数 $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}$,但第 n 项的极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}=\infty\neq 0$,所以当 $x=\pm1$ 时,原级数不收敛,所以原级数的收敛域为 $(-1,1)$ 。

和函数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+2}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}$$

令 $S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

令 $S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}$

$$S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n+1}$$

令 $S_3(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n+1}$,

$$S'_3(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}$$

$$S_3(x)-S_3(0)=\int_0^x\frac{2}{1-t^2}dt=\ln\frac{1+x}{1-x},$$

$$S_3(x)=\ln\frac{1+x}{1-x},$$

所以

$$S_2(x)=\frac{1}{x}S_3(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

所以

$$S(x)=S_1(x)+S_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & x\neq 0\\ 4, & x=0\end{cases}$$

(18)**【详解】**设切点坐标为 (x_0,y_0),则由已知,L 的切线为:

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

其中 $k=\frac{dy}{dx}=\frac{-\sin t}{f'(t)}$,

由已知，切点与 x 轴交点为 $(-\frac{y_0}{k}+x_0,0)$，于是

$$\sqrt{(1+\frac{1}{k^2})y_0^2}=1$$

$\cos^2 t(1+\frac{f'^2(t)}{\sin^2 t})=1$，$f(t)=\ln|\sec t+\tan t|-\sin t+C$，又 $f(0)=0$，$\Rightarrow C=0$

于是，

$$f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t$$

$$\int_0^{+\infty} y dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t f'(t) dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \tan t \sin t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt=\frac{\pi}{4}.$$

(19)【详解】令 $C: x=0 \quad 0\leqslant y\leqslant 2$，则在 $C+L$ 上曲线积分(设其内部区域为 D)可用格林公式，所以

$J=\int_L 3x^2 y dx+(x^3+x-2y)dy=\int_{L+C} 3x^2 y dx+(x^3+x-2y)dy-\int_C 3x^2 y dx+(x^3+x-2y)dy \quad =\iint\limits_D dxdy+\int_0^2(-2y)dy=\frac{\pi}{2}-4$

(20)【详解】(I)按照第一列展开，得

$$|A|=1+(-1)^5 a^4=1-a^4.$$

(II)若 $Ax=\beta$ 有无穷多解，则 $|A|=0$，即 $1-a^4=0$，解得 $a=1$ 或 $a=-1$.

当 $a=1$ 时，

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0-1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0-1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$r(A)<r(\bar{A})$，方程组 $Ax=\beta$ 无解.

当 $a=-1$ 时，

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0-1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，其通解为

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$，其中 k 为任意常数

(21)【详解】(I) 对 A 初等行变换，

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由 $r(A)=r(A^TA)=2$，得 $a=-1$.

(II)

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$$

由 A^TA 的特征多项式

$$|\lambda E-A^TA|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\-(\lambda-2)&\lambda-2&-2\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&0&-2\\-1&\lambda-2&-2\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&\lambda-2&-4\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)$$

得矩阵 A^TA 的特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=2$ 时，解得 $(2E-A^TA)x=0$ 的基础解系 $\alpha_1=(1,-1,0)^T$；

当 $\lambda_2=6$ 时，解得 $(6E-A^TA)x=0$ 的基础解系 $\alpha_2=(1,1,2)^T$；

当 $\lambda_3=0$ 时，解得 $(0E-A^TA)x=0$ 的基础解系 $\alpha_3=(1,1,-1)^T$；

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 已是正交向量组，只需单位化，

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，经过正交变换 $x=Qy$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$ 化成标准形

$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+6y_2^2$.

(22)【详解】(I)

$P(X=2Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=2,Y=1)$

由 X 与 Y 的联合概率分布可知：

$P(X=0,Y=0)=\frac{1}{4}, P(X=2,Y=1)=,0$

所以 $P(X=2Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=2,Y=1)=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$

(II) 由 X 与 Y 的联合概率分布可知：

随机变量 X,Y 以及 XY 的分布律如下表所示：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

XY	0	1	2	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{12}$

所以

$$EX=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}; EX^2=0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{6}=1$$

$$EY=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=1; EY^2=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

$$EXY=0\times\frac{7}{12}+1\times\frac{1}{3}+2\times 0+4\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$$

则

$$DX=EX^2-(EX)^2=1-(\frac{2}{3})^2=\frac{5}{9}, DY=EY^2-(EY)^2=\frac{5}{3}-1^2=\frac{2}{3}$$

$$\operatorname{cov}(X-Y,Y)=\operatorname{cov}(X,Y)-\operatorname{cov}(Y,Y)$$

$$=(EXY-EX\cdot EY)-(EY^2-EY\cdot EY)$$

$$=(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 1)-(\frac{5}{3}-1\times 1)$$

$$=-\frac{2}{3}$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\times DY}}=\frac{EXY-EX\cdot EY}{\sqrt{DX\times DY}}=0$$

(23)【详解】(I)因为随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$

所以 $Z=X-Y$ 也服从正态分布，

其中

$$EZ=E(X-Y)=EX-EY=\mu-\mu=0,$$

$$DZ=D(X-Y)=DX+DY=\sigma^2+2\sigma^2=3\sigma^2$$

从而 Z 服从 $N(0,3\sigma^2)$.

则 Z 的概率密度 $f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z2}{6\sigma 2}}$

(II) $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 在样本值为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 的最大似然函数为：

$$L(z_1,z_2,\cdots,z_n;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{zi2}{6\sigma 2}}=(6\pi)^{-\frac{n}{2}}\cdot(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{6\sigma 2}\sum_{i=1}^{n}zi2}$$

两边同时取对数，有

$$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(6\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i{}^2$$

令 $\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d(\sigma^2)}=-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{6(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}z_i{}^2=0$，可得 $\sigma^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}z_i{}^2$

所以 σ^2 的最大似然估计为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i{}^2$

(III)由(Ⅰ)知，$E\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}E(Z_i{}^2)$ 其中 $E(Z_i{}^2)=[E(Z_i)]^2+D(Z_i)=3\sigma^2$

从而 $E\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}E(Z_i{}^2)=\frac{1}{3n}\cdot 3\sigma^2=\sigma^2$ 所以 σ^2 为 $\hat{\sigma}^2$ 的无偏估计量.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题详解

(1)【答案】(C)

【详解 1】

在区间 [1,2] 上，

$$\frac{f(1)+f(2)}{2}=0,f(\frac{1+2}{2})<0\ ,$$

$f(x)$ 为凹函数；

在区间 $F'(x)=\frac{k}{1+x^2}-1$ 上，

$$\frac{f(2)+f(3)}{2}=0,f(\frac{2+3}{2})<0\ ,$$

$f(x)$ 为凹函数；

在区间 [3,4] 上，

$$\frac{f(3)+f(4)}{2}=0,f(\frac{3+4}{2})>0\ ,$$

$f(x)$ 为凸函数，

在点 $\frac{1}{3}$ 左右函数凹凸性发生改变，所以点 P 为拐点。

【详解 2】原函数可看成 $y=p(x)(x-3)^3$

经计算可得

$$y''(3)=0,y'''(3)\neq 0\ ,$$

所以 (3,0) 是曲线的拐点。其他点不能满足充分条件。

【评注】判断 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线拐点的充分条件：若 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处满足 $f''(x_0)=0,f'''(x_0)\neq 0$，则 $(x_0,f(x_0))$ 为 $y=f(x)$ 的拐点。

(2)【答案】(C)

【详解】根据部分和数列无界，所以级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 发散，可知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ 在 $x=1$ 发散；

$x=-1$ 时为交错级数，根据题意收敛，所以可判断收敛半径为 $R=1$，收敛域是 $[-1,1)$。

所以 $\sum_{k=1}^{n} a_k (x-1)^k$ 的收敛域为 $\{x\,|-1\leqslant x-1<1\}$，即 $x\in[0,2)$

(3)【答案】(A)

【详解】根据 $\begin{cases} z_x=f'(x)\ln f(y)=0 \\ z_y=\dfrac{f(x)f'(y)}{f(y)}=0 \end{cases}$，

$$z_{xx}=f''(x)\ln f(y),z_{yy}=\frac{f(x)}{f^2(y)}[f''(y)f(y)-(f'(y))^2],z_{xy}=\frac{f'(x)f'(y)}{f(y)}$$

对于 $(0,0)$，

$$A=z_{xx}(0,0)=f''(0)\ln f(0)\ ,\ C=z_{yy}(0,0)=f''(0)\ ,\ B=z_{xy}(0,0)=0$$

根据题意可判断当 $f(0)>1,f''(0)>0$ 时，点 $(0,0)$ 取得极小值.

(4)【答案】(B)

【详解】在区间 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上，

$$\sin x<\cos x<\cot x,$$

又因为 $\ln x$ 是增函数，所以

$$\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x,$$

由定积分比较大小的性质可知，应选(B)

(5)【答案】(D).

【详解】由初等变换及初等矩阵的性质易知 $P_2AP_1=E$，从而

$$A=P_2^{-1}P_1^{-1}=P_2P_1^{-1}\ ,$$

答案应选(D).

(6)【答案】(D).

【详解】由 $(1,0,1,0)^T$ 是方程 $AX=0$ 的一个基础解系，知 $r(A)=3$，从而

$$r(A^*)=1,|A|=0\ ,$$

于是 $A^*A=|A|E=0$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 $A^*X=0$ 的解.

由 $\alpha_1+\alpha_3=0$，知 α_1,α_3 线性相关；由 $r(A)=3$，知 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，

又 $r(A^*)=1$，从而 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 $A^*X=0$ 的基础解系，故应选(D).

(7)【答案】(D).

【详解】由概率密度的性质知，概率密度必须满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1\ ,$$

故由题知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}dF_1(x)F_2(x)=F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1$$

故选择(D).

(8)【答案】(B).

【详解】由题易知,

$$当\ X<Y\ 时,U=Y,V=X\ ;$$

$$当\ X>Y\ 时,U=X,V=Y\ ;$$

$$当\ X=Y\ 时,U=Y,V=X\ ;$$

则都有 $EUV=EXY=EXEY$,故选择 B.

(9)【答案】$\ln(\sqrt{2}+1)$

【详解】$s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(\sqrt{2}+1)$

(10)【答案】$e^{-x}\sin x$

【详解】$y=e^{-\int 1dx}(C+\int e^{-x}\cos x e^{\int 1dx}dx)=e^{-x}(C+\sin x)$,

由于 $y(0)=0$,所以

$$y=e^{-x}\sin x$$

(11)【答案】2

【详解】$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\sin(xy)}{1+(xy)^2}y$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_{x=0,y=2}=\frac{d}{dx}(\frac{\sin(2x)}{1+4x^2})\Big|_{x=0}=2$

(12)【答案】π

【详解】$\oint\limits_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=\iint\limits_{\Sigma}ydydz+xdzdx+dxdy=\iint\limits_{\Sigma}(1-x-y)dxdy$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(1-x-y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\rho-\rho^2(\cos\theta-\sin\theta))d\rho=\pi$$

(13)【答案】$a=1$.

【详解】本题实际上就是把二次型

$$x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz$$

正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2$,

二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,秩为 2.

由

$$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&1\\a&3&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\0&3-a&1-a\end{pmatrix}$$

解得，$a=1$

(14)【答案】$\mu(\mu^2+\sigma^2)$

【详解】由题知 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0$，即 X 与 Y 不相关.

在二维正态分布条件下，X 与 Y 不相关与 X 与 Y 独立等价，

所以 X 与 Y 独立，则有

$$EX=EY=\mu,DX=DY=\sigma^2$$

$$EY^2=DY+(EY)^2=\mu^2+\sigma^2$$

$$E(XY^2)=EXEY^2=\mu(\mu^2+\sigma^2)$$

(15)【分析】此极限是"1^∞"型，用取对数的方法

【详解】$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{e^x-1}\ln\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}=e^{\lim_{x\to0}\frac{1}{e^x-1}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)}$

$$=e^{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x2}}=e^{\lim_{x\to0}\frac{-x}{2x(1+x)}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

(16)【详解】由于 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值，故必有 $g'(1)=0$.

由题又知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot y+f'_2\cdot yg'(x),$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=1}=f'_1(y,y)\cdot y$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=1}\right)=\frac{d}{dy}(f'_1(y,y)\cdot y)=[f''_{11}(y,y)+f''_{11}(y,y)]y+f'_1(y,y)$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}(1,1)+f''_{12}(1,1)+f'_1(1,1)$$

(17)【详解】令 $F(x)=k\arctan x-x$，有 $F(0)=0$，

因为 $F(x)$ 为奇函数，故只考虑 $x>0$ 部分。

$$F'(x)=\frac{k}{1+x^2}-1,$$

当 $k\leqslant1$，$F'<0$，当 $x>0$，方程无实根

当 $k>1$ 时，$F(x)$ 先增后减，而到正无穷时，$F(x)$ 趋于负无穷，所以有一个正根

故当 $k\leqslant 1$，方程只有一个实根

当 $k>1$ 时，方程有三个不同实根。

(18)①【详解 1】转化为函数不等式，先证明 $0<x\leqslant 1$，有 $\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$ 。

设 $f(x)=\ln(1+x)-x$ ，则当 $0<x\leqslant 1$ 时，有

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1<0$$

$f(x)$ 单调减少，故 $f(x)<f(0)=0$，所以 $\ln(1+x)<x$ ；

设 $g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$ ，当 $0<x\leqslant 1$ 时，有

$$g'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}>0,$$

$g(x)$ 单调增加，故 $g(x)>g(0)=0$，所以 $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$ ；

故 $0<x\leqslant 1$，有 $\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$ 成立。

令 $x=\frac{1}{n}$ ，即有 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 成立。

【详解 2】设 $f(x)=\ln(1+x)$ ，在 $[0,x]$ 上应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x)-f(0)=\frac{1}{1+\xi}(x-0),0<\xi<x$$

即 $\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}$，又 $0<\xi<x$ ，有 $\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x$ ，于是，

$$\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x ,$$

令 $x=\frac{1}{n}$ ，即有 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 成立。

②【详解】由题设，考查

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0$，

故数列 $\{a_n\}$ 为单调递减数列；

又由①可知，

$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n}) ,$$

故

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+\frac{1}{1})+\ln(1+\frac{1}{2})+\ldots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n$$

$$=\ln(\frac{1}{n}\ \frac{2}{1}\ \frac{3}{2}\ldots\frac{n+1}{n})$$

$$=\ln\frac{n+1}{n}>0$$

所以，由单调有界数列收敛准则知，数列 $\{a_n\}$ 收敛。

(19)**【详解】**根据二重积分的计算

$$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy=\int_0^1 x\left(\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy\right)dx$$

$$\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1 ydf'_x(x,y)=(yf'_x(x,y))\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f'_x(x,y)dy$$

$$=f'_x(x,1)-\int_0^1 f'_x(x,y)dy=-\int_0^1 f'_x(x,y)dy$$

则 原式 $=\int_0^1 x\left(-\int_0^1 f'_x(x,y)dy\right)dx=-\int_0^1\left(\int_0^1 xf'_x(x,y)dx\right)dy$

$$=-\int_0^1\left(\int_0^1 xf'_x(x,y)dx\right)dy=-\int_0^1\left(\int_0^1 xdf(x,y)\right)dy$$

$$=-\int_0^1\left((xf(x,y))\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy$$

$$=-\int_0^1\left(f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$$

(20)**【详解】**(I)易知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，由其不能被 β_1,β_2,β_3 线性表出，得到 β_1,β_2,β_3 线性相关，从而 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)<3$.

由

$$\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&2&a-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&-5\end{pmatrix}$$

得 $a=5$.

(II)

由

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}$$

得
$$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3)=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(21)【详解】(I)易知特征值-1对应的特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,特征值1对应的特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.由$r(A)=2$知A的另一个特征值为0.因为实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交,从而特征值0对应的特征向量为$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(II)

由
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

得
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(22)【详解】(Ⅰ)由于$P(X^2=Y^2)=1$,即
$$P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=-1)+P(X=1,Y=1)=1$$
则有
$$P(X=1,Y=0)=P(X=0,Y=-1)=P(X=0,Y=1)=0$$
$$P(X=0,Y=0)=P(Y=0)-P(X=1,Y=0)=\frac{1}{3}$$
$$P(X=1,Y=-1)=P(Y=-1)-P(X=0,Y=-1)=\frac{1}{3}$$
$$P(X=1,Y=1)=P(Y=1)-P(X=0,Y=1)=\frac{1}{3}$$
所以(X,Y)的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

（Ⅱ）易知随机变量 Z 的可能取值为 $-1,0,1$，则有

$P(Z=1)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}$

$P(Z=-1)=P(X=1,Y=-1)=\frac{1}{3}$

$P(Z=0)=1-P(Z=1)-P(Z=-1)=\frac{1}{3}$

故 $Z=XY$ 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

（Ⅲ）由（Ⅰ）和（Ⅱ）知

$$E(XY)=EZ=(-1)\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}=0$$

$$EX=\frac{2}{3}$$

$$EY=(-1)\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}=0$$

故有

$$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=0,$$

所以 $\rho_{XY}=0$

(23)**【详解】**（Ⅰ）由题知，最大似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\cdot(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}$$

两边同时取对数,有

$$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$$

令 $\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d(\sigma^2)}=-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2=0$,可得

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$$

所以 σ^2 的最大似然估计为

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$$

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,

$$E\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu_0)^2=\sigma^2$$

由于 $X_i\sim N(\mu_0,\sigma^2)(i=1,2,\cdots,n)$,则有

$$\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\sim N(0,1)(i=1,2,\cdots,n),$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$$

则 $D\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2\right]=2n$

故

$$D\hat{\sigma}^2=D\left[\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2\right]=\frac{\sigma^4}{n^2}D\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2\right]=\frac{2\sigma^4}{n}$$

2010年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题详解

(1)【答案】(C)

【详解】

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x}=\lim_{x\to\infty}e^{x\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{x\left(\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{(a-b)x^2+abx}{(x-a)(x+b)}}=e^{a-b}$$

(2)【答案】(B).

【详解】等式两边求全微分得：

$$(F'_1u_x+F'_2v_x)dx+(F'_1u_y+F'_2v_y)dy+(F'_1u_z+F'_2v_z)dz=0\text{ ,}$$

所以有，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_1u_x+F'_2v_x}{F'_1u_z+F'_2v_z}\text{ , }\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_1u_y+F'_2v_y}{F'_1u_z+F'_2v_z}\text{ ,}$$

其中，

$$u_x=-\frac{y}{x^2}\text{ , }u_y=\frac{1}{x}\text{ , }u_z=0\text{ , }v_x=-\frac{z}{x^2}\text{ , }v_y=0\text{ , }v_z=\frac{1}{x}\text{ ,}$$

代入即可。

(3)【答案】(D)

【详解】显然 $x=0,x=1$ 是两个瑕点，有

$$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$$

对于 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的瑕点 $x=0$，当 $x\to0^+$ 时

$$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=\ln^{\frac{2}{m}}(1-x)x^{-\frac{1}{n}}\text{ 等价于 }(-1)^{\frac{2}{m}}x^{\frac{2}{m}-\frac{1}{n}}\text{ ,}$$

而 $\int_0^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{m}-\frac{1}{n}}dx$ 收敛(因 m,n 是正整数 $\Rightarrow\frac{2}{m}-\frac{1}{n}>-1$)，故 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛；

对于 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的瑕点 $x=1$,当 $x\in(1-\delta,1)(0<\delta<\frac{1}{2})$ 时

$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}<2^{\frac{1}{n}}\ln^{\frac{2}{m}}(1-x)<2^{\frac{1}{n}}(1-x)^{\frac{2}{m}}$,而 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x)^{\frac{2}{m}}dx$ 显然收敛,

故 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛。所以选择(D).

(4)【答案】(D)

【详解】

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+(\frac{j}{n})^2)}\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$$

(5)【答案】(A)

【详解】由于 $AB=E$ 所以 $R(AB)=m$

又

$$R(AB)=m\leqslant\min(R(A),R(B)),$$

即

$$R(A)\geqslant m,R(B)\geqslant m$$

而 $R(A)\leqslant m,R(B)\leqslant m$

所以

$$R(A)=m,R(B)=m$$

(6)【答案】(D).

【详解】设 A 的特征值为 r,因为 $A^2+A=0$ 所以 $\lambda^2+\lambda=0$

即

$$\lambda(\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda=0\text{ 或 }\lambda=-1$$

又因为 $R(A)=3$,A 必可相似对角化,且对角阵的秩也是 3.

所以 $\lambda=-1$ 是三重特征根

故

$$A\sim\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$$

所以正确答案为(D)

(7)【答案】(C).

【详解】$P\{x=1\}=F(1)-F(1-0)=1-e^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-e^{-1}$.所以选(C)

(8)【答案】(A)..

【详解】由概率密度的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$,有

$$a\int_{-\infty}^{0} f_1(x)dx+b\int_{0}^{3} f_2(x)dx=1\Rightarrow \frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b=1\Rightarrow 2a+3b=4$$

所以选 A.

(9)【答案】0.

【详解】

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\left(\frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}}\right)'\frac{1}{x'(t)}$$

$$=-\frac{\frac{2t}{1+t^2}e^{-t}+\ln(1+t^2)e^{-t}}{(e^{-t})^2}\times\frac{1}{-e^{-t}}=e^{2t}(\frac{2t}{1+t^2}+\ln(1+t^2))$$

故

$$\frac{d^2y}{d^2x}|_0=0$$

(10)【答案】.-4π

【详解】令 $\sqrt{x}=t$，原式为

$$2\int_0^{\pi} t^2\cos tdt=2\left(t^2\sin t\ |_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2t\sin tdt\right)=-4\int_0^{\pi}t\sin tdt$$

$$=4\left(t\cos t\ |_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos tdt\right)=-4\pi$$

(11)【答案】0.

【详解】令

$$L_1:\begin{cases}x=t\\ y=1+t\end{cases}-1\leqslant t\leqslant 0\qquad L_2:\begin{cases}x=t\\ y=1-t\end{cases}0\leqslant t\leqslant 1$$

则

$$\int_L xydx+x^2dy=\int_{L1}xydx+x^2dy+\int_{L2}xydx+x^2dy=\int_{-1}^{0}t(1+t)+t^2dt+$$

$\int_0^1 t(1-t)-t^2dt=\left(\frac{2}{3}t^3+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}++\left(\frac{t^2}{2}-\frac{2}{3}t^3\right)\Big|_0^1=0$

(12)【答案】$\frac{2}{3}$.

【详解】$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz}{\iiint\limits_{\Omega} dxdydz}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 zdz}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$

(13)【答案】$\alpha=6$.

【详解】由题意知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，而其中两个向量线性无关，所以 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，

即

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&\alpha\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&3\\0&2&\alpha\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&0&0\\0&0&\alpha-6\end{pmatrix}$$

所以

$$\alpha-6=0$$

即

$$\alpha=6$$

(14)【答案】2.

【详解】由概率密度的性质 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=1$，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C}{k!}=1\Rightarrow C=e^{-1}$$

即 $P\{X=k\}=\frac{e^{-1}}{k!},k=0,1,2,\cdots$ 为参数为 1 的泊松分布，则有

$$EX=1,DX=1\Rightarrow EX^2=DX+(EX)^2=2$$

(15)【详解】齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程为

$$\lambda^2-3\lambda+2=0$$

由此得

$$\lambda_1=2,\lambda_2=1.$$

对应齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{x}$$

设非齐次方程的特解为 $y=(Ax+B)xe^{x}$ 代入原方程得 $A=-1,B=-2$ 从而所求解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{x}+(-x^2-2x)e^{x}$$

(16)【详解】由

$$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t}dt=0\ ,$$

可得，$x=0,\pm1$

在区间 $(-1,0)$ ，$(1,+\infty)$ ，$f'(x)\geqslant0$，函数单增

在区间 $(-\infty,-1)$ ，$(0,1)$ ，$f'(x)\leqslant0$，函数单减。

所以，极小值为 $f(1)=f(-1)=0$ 极大值为 $f(0)=1-\dfrac{2}{e}$

所以，单增区间 $(-1,0)$，$(1,\infty)$ ，单减区间 $(-\infty,-1)$，$(0,1)$

(17)【详解】令 $f(t)=\ln(1+t)-t$

当 $0\leqslant t\leqslant1$ 时，

$$f'(t)=\frac{1}{1+t}-1\leqslant0$$

故当 $0\leqslant t\leqslant1$ 时

$$f(t)\leqslant f(0)=0$$

即 $0\leqslant t\leqslant1$ 时

$$0\leqslant\ln(1+t)\leqslant t\leqslant1$$

从而 $(\ln(1+t))^n\leqslant t^n(n=1,2,\cdots)$ 又由 $|\ln t|\geqslant0$

得 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^ndt\leqslant\int_0^1t^n|\ln t|dt(n=1,2,\cdots)$

$$\int_0^1|\ln t|t^ndt=-\int_0^1(\ln t)t^ndt=-(\ln t)\frac{1}{n+1}t^{n+1}|_0^1+\int_0^1\frac{1}{n+1}t^ndt=\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|\ln t|t^ndt=0\qquad M_n\geqslant0$$

由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^ndt=0$$

(18)【详解】

因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}(2n-1)}{x^{2n}(2n+1)}\right|=x^2\ ,$$

所以当 $x^2<1$ 即 $-1<x<1$ 时，原幂级数绝对收敛；当 $x=\pm1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，显然收敛，故原幂级数的收敛域为 $[-1,1]$。

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$$

设

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=f(x),x\in(-1,1)$$

则

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}=\frac{1}{1+x^2}$$

因为 $f(0)=0$，所以

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt+f(0)=\arctan x$$

从而

$$s(x)=x\arctan x,x\in[-1,1]$$

收敛域 $x\in[-1,1]$，和函数

$$s(x)=x\arctan x$$

(19)**【详解】**(1)切平面法向量

$$F_x=2x,F_y=2y-z,F_z=2z-y,$$

因与 xOy 面垂直，

所以

$$2x\times0+(2y-z)\times0+(2z-y)\times1=0\Rightarrow z=\frac{y}{2}$$

所以轨迹为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\ y=2z\end{cases}$$

(2) $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-8yz}}{2z-y}dxdy$

原式 $=\iint\limits_{D_{xy}}x+\sqrt{3}dxdy,D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+\frac{3}{4}y^2\leqslant1\}=\iint\limits_{D_{xy}}xdxdy+\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{3}dxdy$

$=0+\sqrt{3}\cdot\pi\cdot1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi$

(20)【详解】(Ⅰ)由题意知，$Ax=b$ 的增广矩阵为

$$\bar{A}=(A\vdots b)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & \vdots & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \vdots & 1\\ 1 & 1 & \lambda & \vdots & 1\end{pmatrix}\xleftrightarrow{r1\leftrightarrow r3}\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \vdots & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \vdots & 1\\ \lambda & 1 & 1 & \vdots & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-\lambda r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \vdots & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \vdots & a-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \vdots & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & \vdots & a+1-\lambda\end{pmatrix}$$

$Ax=b$ 有 2 个不同的解，则

$$R(\bar{A})=R(A)<3$$

得，

$$1-\lambda^2=0, a+1-\lambda=0$$

解得

$$\lambda=1 \text{ 或 } \lambda=-1, a+1-\lambda=0$$

得，

$$a=\lambda-1$$

但 $\lambda=1$ 时 $R(A)=1<R(\bar{A})=2$，方程组 $Ax=b$ 无解

所以

$$\lambda=-1, a=\lambda-1$$

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，

$$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

等价方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\ -2x_2=1\end{cases}$$

$\because R(A)=R(\bar{A})=2$

$\therefore$ 对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系含 1 个解向量，即

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$Ax=b$ 的一个特解为

$$\beta=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$Ax=b$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$(其中 k 为任意常数)。

(21)【详解】

(Ⅰ)由题意知 $Q^TAQ=\Lambda$,其中 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$,则

$$A=Q\Lambda Q^T$$

设 Q 的其他任一列向量为

$$(x_1,\quad x_2,\quad x_3)^T$$

Q 为正交矩阵,所以

$$(x_1,\quad x_2,\quad x_3)\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=0\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3=0$$

即 $x_1+x_3=0$,其基础解系含 2 个线性无关的解向量,即为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

把 α_1 单位化得

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

则

$$Q=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

所以

$$A=Q\Lambda Q^T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(II)证明：由

$$(A+E)^T=A^T+E=A+E$$

得 $A+E$ 为实对称矩阵

又 A 的特征值为 1，1，0；所以，$A+E$ 的特征值为 2，2，1，都大于 0.

因此 $A+E$ 为正定矩阵。

(22)【详解】由概率密度的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-2x^2+2xy-y^2}dxdy=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}dy=1$$

又知 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}dy=\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}=\pi$$

所以 $A=\frac{1}{\pi}$，即 $f(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}$

X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}dy=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}，-\infty<x<+\infty$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

(23)【详解】由题知 N_1,N_2,N_3 分别服从二项分布 $B(n,1-\theta),B(n,\theta-\theta^2),B(n,\theta^2)$,则有

$$EN_1=n(1-\theta),EN_2=n(\theta-\theta^2),EN_3=n\theta^2$$

$$ET=E(\sum_{i=1}^{3}a_iN_i)=\sum_{i=1}^{3}a_iEN_i=a_1n(1-\theta)+a_2n(\theta-\theta^2)+a_3n\theta^2=\theta$$

解得

$$\begin{cases}a_1=0\\a_2=\dfrac{1}{n}\\a_3=\dfrac{1}{n}\end{cases}$$

即

$$T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i=\frac{N_2+N_3}{n}=\frac{n-N_1}{n}=1-\frac{N_1}{n}$$

$$DT=D(1-\frac{N_1}{n})=\frac{1}{n^2}DN_1=\frac{1}{n^2}\times n(1-\theta)\theta=\frac{(1-\theta)\theta}{n}$$

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题详解

(1)【答案】(A)

【详解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin ax}{x^2(-bx)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-a\cos x}{-3bx^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^2\sin ax}{-6bx}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^2\sin ax}{-\dfrac{6b}{a}.ax}=-\dfrac{a^3}{6b}=1$

解得,$a^3=-6b$ 意味选项(B),(C)错误.

再由 $\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 存在,故有 $1-a\cos ax\to 0(x\to 0)$,故 $a=1$,(D)错误,所以选(A).

(2)【答案】(A)

【详解】本题利用二重积分区域的对称性及被积函数的奇偶性. D_2,D_4 关于 x 轴对称,而 $-y\cos x$ 即被积函数是关于 y 的奇函数,所以 $I_2=I_4$;D_1,D_3 两区域关于 y 轴对称,$y\cos(-x)=y\cos x$ 即被积函数是关于 x 的偶函数,由积分的保号性,$I_1=2\iint\limits_{\{(x,y)|y\geqslant x,0\leqslant x\leqslant 1\}}y\cos xdxdy>0,I_3=2\iint\limits_{\{(x,y)|y\leqslant -x,0\leqslant x\leqslant 1\}}y\cos xdxdy<0$,所以正确答案为 A.

(3)【答案】(D)

【详解】考查函数与其变限积分函数的关系、函数与其导函数之间的关系,变限积分函数的性质(两个基本定理),定积分的几何意义.由 $y=f(x)$ 的图形可见,其图像与 x 轴所围的图形的代数面积应为函数 $F(x)$,由于 $f(x)$ 有第一类间断点,$F(x)$ 只能为连续函数,不可导.

$x\in(-1,0)$ 时,$f(x)>0$ 且为常数,应有 $F(x)$ 单调递增且为直线函数.

$x\in(0,1)$ 时,$f(x)<0,F(x)\leqslant 0$,且单调递减. $x\in(1,2)$ 时,$f(x)>0,F(x)$ 单调递增. $x\in(2,3)$ 时,$f(x)=0,F(x)$ 为常值函数.正确选项为(D).

(4)【答案】(C)

【详解 1】

$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛,则 $\lim_{n\to\infty}|b_n|=0$,又 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$,必存在 N,使当 $n>N$ 时 $|b_n|<\frac{1}{2}$ 且 $|a_n|<\frac{1}{2}$ (极限的有界性!),$a_n^2b_n^2<|b_n|$,立即由正项级数的比较判别法得到:

当 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n^2b_n^2|$ 收敛.应选(C).

【详解 2】

反例:对 A 取 $a_n=b_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$,对 B 取 $a_n=b_n=\frac{1}{n}$,对 D 取 $a_n=b_n=\frac{1}{n}$.

(5)【答案】(A)

【详解】由基 $a_1,\frac{1}{2}a_2,\frac{1}{3}a_3$ 到 a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_1 的过渡矩阵满足

$$(a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_1)=\left(a_1,\frac{1}{2}a_2,\frac{1}{3}a_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$$

所以此题选(A).

(6)【答案】(B)

【详解】由于分块矩阵 $\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}$ 的行列式 $\begin{vmatrix}0&A\\B&0\end{vmatrix}=(-1)^{2\times2}|A||B|=2\times3=6$,即分块矩

阵可逆,根据公式 $C^*=|C|C^{-1}$,

$$\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix}0&A\\B&0\end{vmatrix}\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}0&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}0&\frac{1}{|B|}B^*\\\frac{1}{|A|}A^*&0\end{pmatrix}$$

$$=6\begin{pmatrix}0&\frac{1}{3}B^*\\\frac{1}{2}A^*&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2B^*\\3A^*&0\end{pmatrix},$$

故答案为(B).

(7)【答案】(C)

【详解】因为

$$F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

所以

$$F'(x)=0.3\varphi(x)+\frac{0.7}{2}\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)=0.3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x2}{2}}+0.7\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)2}{2\times 22}},$$

由于 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x2}{2}}$ 是 $N(0,1)$ 的概率密度函数,故其期望值为 0,

$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)2}{2\times 22}}$ 是 $N(1,2^2)$ 的概率密度函数,其期望值为 1,所以

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xF'(x)dx=0.3\times 0+0.7\times 1=0.7$$

(8)【答案】(B)

【详解】$F_z(z)=P(XY\leqslant z)=P(XY\leqslant z\mid Y=0)P(Y=0)+P(XY\leqslant z\mid Y=1)P(Y=1)$

$$=\frac{1}{2}[P(XY\leqslant z\mid Y=0)+P(XY\leqslant z\mid Y=1)]$$

$$=\frac{1}{2}[P(X.0\leqslant z\mid Y=0)+P(XY\leqslant z\mid Y=1)]$$

由于 X,Y 独立. $F_z(z)=\frac{1}{2}[P(X.0\leqslant z)+P(X\leqslant z)]$.

若 $z<0$,则 $F_z(z)=\frac{1}{2}\Phi(z)$,

若 $z\geqslant 0$,则 $F_z(z)=\frac{1}{2}(1+\Phi(z))$

$z=0$ 为间断点,故选(B)

(9)【答案】$xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$

【详解】$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1+f'_2.y$,$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$

(10)【答案】$y=-xe^x+x+2$

【详解】由 $y=(C_1+C_2)e^x$,得二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的特征值

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\text{故 } a=2,b=1,$$

要求解的微分方程为

$$y''-2y'+y=x.$$

设特解 $y_0=Ax+B$ 代入微分方程 $y''-2y'+y=x$,

得出

$$-2A+Ax+B=x$$

解得,

$$A=1,B=2,$$

故微分方程 $y''-2y'+y=x$ 特解 $y''=x+2$,通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^x+x+2$$

代入初始条件 $y(0)=2,y'(0)=0$,得 $C_1=0,C_2=-1$,要求方程的解为

$$y=-xe^x+x+2$$

(11)【答案】$\frac{13}{6}$

【详解】由题意,$x=x,y=x^2,0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$,则

$$ds=\sqrt{(x^2)'+(y^2)'}dx=\sqrt{1+4x^2}dx,$$

所以

$$\int_L xds=\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4x^2}d(1+4x^2)=\frac{1}{8}.\frac{2}{3}\sqrt{(1+4x^2)^3}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{6}.$$

(12)【答案】$\frac{4}{15}\pi$

【详解 1】

由轮换对称性,

$$\iiint_\Omega x^2dxdydz=\iiint_\Omega y^2dxdydz=\iiint_\Omega z^2dxdydz$$

$$\iiint_\Omega z^2dxdydz=\frac{1}{3}\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2.\rho^2\sin\varphi d\rho=\frac{4}{15}\pi$$

【详解 2】

$$\iiint_\Omega z^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2\sin\varphi\rho^2\ \cos^2\varphi d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\ \cos^2\varphi d(-\cos\varphi)\int_0^1\rho^4d\rho=2\pi.\frac{\cos^3\varphi}{3}\int_0^{\pi}\ \frac{1}{5}d\varphi=\frac{4}{15}\pi$$

(13)【答案】2

【详解 1】由 $a^T\beta=2,\beta a^T\beta=\beta(a^T\beta)=2.\beta,\beta a^T$ 的非零特征值为 2.

【详解 2】本题也可根据矩阵 βa^T 是秩为 1 的 3 阶矩阵,可知其特征值必为 0,0,$tr(\beta a^T)$,而 $tr(\beta a^T)=a^T\beta=2$,求得答案.

(14)【答案】-1

【详解】由 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计,即 $E(\overline{X}+kS^2)=np^2$.

即

$$E(\overline{X}+kS^2)=E\overline{X}+E(kS^2)=np+knp(1-p)=np^2$$

解得，$k=-1$.

(15)【详解】令

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=2x(2+y^2)=0, \\ f'_y(x,y)=2x^2y+\ln y+1=0, \end{cases}$$

解得，驻点为 $x=0,y=\frac{1}{e}$.

$$f''_{xx}=2(2+y^2),\ f''_{yy}=2x^2+\frac{1}{y},\ f''_{xy}=4xy$$

则

$$f''_{xx}\big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=2\left(2+\frac{1}{e^2}\right),f''_{xy}\big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=0,f''_{yy}\big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=e$$

在驻点，

$$f''_{xx}>0,(f''_{xy})^2-f''_{xx}f''_{yy}>0\ ,$$

二元函数存在极小值 $f\left(0,\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$

(16)【详解】曲线 $y=x^n$ 与曲线 $y=x^{n+1}$ 在点 $x=0$ 和 $x=1$ 处相交，

$$a_n=\int_0^1(x^n-x^{n+1})dx=(\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2})\big|_0^1=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\ ,$$

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}+\ldots$$

由

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\ldots+(-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n}+\ldots\ ,$$

令 $x=1$，得

$$\ln(2)=1-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots)=1-S_2\ ,$$

$$S_2=1-\ln 2$$

(17)【详解】(I) S_1 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{3}=1$，

过点(4,0)与 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的切线为两条，由线绕 x 轴旋转体的几何意义，只需求一条即

可，切线 $\frac{xx_0}{4}+\frac{yy_0}{3}=1$ 过点(4,0)，斜率为 $k=-\frac{3x_0}{4y_0}$，得到切点为

$x_0=1, y_0=\pm\frac{3}{2}, k=\pm\frac{1}{2}$，取一条切线 $y=\frac{1}{2}x-2$.

得到 S_2 的方程为 $y^2+z^2=(\frac{1}{2}x-2)^2$

(II)记 $y_1=\frac{1}{2}x-2, y_2=\sqrt{3(1-\frac{x^2}{4})}$，则

$$V_x=\int_0^4\pi y_1^2dx-\int_0^2\pi y_2^2dx=\pi\int_0^4(\frac{1}{4}x^2-2x+4)dx-\pi\int_0^2(3-\frac{3}{4}x^2)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{12}x^3-x^2+4x\right]_0^4-\pi\left[3x-\frac{1}{4}x^3\right]_0^2=\frac{4}{3}\pi$$

(18)**【详解】**

(I)过 $(a,f(a))$ 与 $(b,f(b))$ 的直线方程为

$$y(x)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

取辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

则 $F(a)=F(b)$；

$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

由罗尔定理，存在 $\zeta\in(a,b)$，使 $F'(\zeta)=0$，即

$$f'(\zeta)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,\text{或 } f(b)-f(a)=f'(\zeta)(b-a).$$

(II)任取 $x\in(0,\delta)$，则函数 $f(x)$ 满足：

在闭区间 $[0,x]$ 上连续，开区间 $((0,x_0))$ 内可导，由拉格朗日中值定理可得：

$\exists\zeta\in(0,x)\subset(0,\delta)$，使得

$$f'(\zeta)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0},$$

两边取 $x\to0^+$ 时的极限，注意到 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，可得

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}f(\zeta)=A$$

于是 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$

(19)【详解】$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 $2x^2+2y^2+z^2=4$

记 $X=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，$Y=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，$Y=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，则

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

由轮换对称性，

$$\frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{x^2+z^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

除原点外，散度 $div(X,Y,Z)=\frac{\partial X}{x}+\frac{\partial Y}{y}+\frac{\partial Z}{z}=0$.

记 S_1 取曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的内侧，由高斯公式，可得：

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydxdz+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma+S_1}\frac{xdydz+ydxdz+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\oiint\limits_{S_1}\frac{xdydz+ydxdz+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\iint\limits_{S_1}xdydz+ydxdz+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}3dV=3.\frac{4\pi}{3}=4\pi$$

(20)【详解】(I)解方程 $A\zeta_2=\zeta_1$，

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

故 $\zeta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，其中 k_1 为任意常数.

解方程 $A^2\zeta_3=\zeta_1$，

$$\overline{A^2}=\begin{pmatrix}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故 $\zeta_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 k_2,k_3 为任意常数.

(II)证明:由于

$$\begin{vmatrix}-1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k_1 & -\frac{1}{2}-k_2\\ 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}k_1 & k_2\\ -2 & k_1 & k_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}k_1 & k_2\\ -2 & k_1 & k_3\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}(k_1+1-k_1)=-\frac{1}{2}\neq 0.$$

故 ζ_1,ζ_2,ζ_3 线性无关.

(21)【详解】(I)由 $A=\begin{pmatrix}a & 0 & 1\\ 0 & a & -1\\ 1 & -1 & a-1\end{pmatrix}$ 得

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-a & \lambda-a & 0\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & 0\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 2 & \lambda-a+1\end{vmatrix}$$

$=(\lambda-a)((\lambda-a)^2+(\lambda-a)-2)=(\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+2)$.

所以二次型的矩阵 A 的特征值为 $a-2,a,a+1$.

(II)若规范形为 $y_1^2+y_2^2$，说明有两个特征值为正，一个为 0，

当 $a=2$ 时，三个特征值为 0,2,3，这时，二次型的规范形为 $y_1^2+y_2^2$.

(22)【详解】(I)在没有取白球的情况下取了一次红球，利用样本空间的缩减法，相当于只有 1 个红球，2 个黑球放回摸两次，其中摸一个红球的概率，所以 $P\{X=1|Z=0\}=\frac{C_2^1\times 2}{3^2}=\frac{4}{9}$.

(II)X,Y 取值范围为 1,1,2，故

$P(X=0,Y=0)=\frac{C_3^1\times C_3^2}{6^2}=\frac{1}{4}$，$P(X=1,Y=0)=\frac{C_2^1\times C_3^1}{6^2}=\frac{1}{6}$，

$P(X=2,Y=0)=\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}$，$P(X=0,Y=1)=\frac{C_2^1\times C_2^1\times C_3^1}{6^2}=\frac{1}{3}$，

$P(X=1,Y=1)=\frac{C_2^1\times C_2^1}{6^2}=\frac{1}{9}$，$P(X=2,Y=1)=0$，

$P(X=0,Y=2)=\frac{C_2^1\times C_2^1}{6^2}=\frac{1}{9}$，$P(X=1,Y=2)=0$，$P(X=2,Y=2)=0$

Y \ X	01	2	
0	1/4	1/6	1/36
1	1/3	1/9	0
2	1/9	0	0

(23)【详解】(I)由

$$EX=\int_0^{+\infty}\lambda^2x^2e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda},$$

令 $EX=\bar{X}$,可得总体参数 λ 的矩估计量

$$\hat{\lambda}=\frac{2}{\bar{X}}.$$

(II)构造似然函数

$$L(x_1,......x_n,\lambda)=\begin{cases}\prod_{l=1}^{n}f(x_l)=\lambda^{2n}.\prod_{l=1}^{n}x_l.e^{-\lambda\sum_{l=1}^{n}x_l},x_1,....x_n>0\\0,其他\end{cases}$$

当 $x_1,x_2...x_n>0$ 时,取对数

$$\ln L=2n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\lambda\sum_{i=1}^{\pi}x_i$$

令 $\frac{d\ln L}{d\lambda}=0$,得

$$\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0,$$

解得

$$\lambda=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{2}{\bar{X}}$$

故其最大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{2}{\bar{X}}$.