



公务员录用考试名师微魔块教材(5)

微魔块

数量资料秒杀

36计

审定：华图公职研究院



刘有珍

目 录

第一计	★★★★代入排除法	1	第十四计	★★★十字交叉法	53
第二计	★★★★整除判断法	6	第十五计	★★★★相遇追及问题	58
第三计	★★★★奇偶特性法	10	第十六计	★★★钟表问题	62
第四计	★★★★赋值法	14	第十七计	★★★★比例法	66
第五计	★★★工程问题	18	第十八计	★★★调和平均数	70
第六计	★★★尾数法	23	第十九计	★★★牛吃草问题	73
第七计	★★★裂项相消	26	第二十计	★★★年龄问题	78
第八计	★★★等差数列	29	第二十一计	★★★经济利润问题	82
第九计	★★★因数倍数	33	第二十二计	★★★容斥原理	86
第十计	★★★余数问题	37	第二十三计	★★★★排列组合	90
第十一计	★★★周期规律法	40	第二十四计	★★★捆绑插空	93
第十二计	★★★★不定方程问题	44	第二十五计	★★★★抽屉原理	96
第十三计	★★★★溶液问题	49	第二十六计	★★★构造设定	99

第二十七计	★★★三边关系	102	第三十五计	★★★八大速算法	147
第二十八计	★★几何面积	105	技巧(一):估算法与直除法	147	
第二十九计	★★★几何体积	111	技巧(二):化同法与放缩法	151	
第三十计	★★★植树问题	115	技巧(三):插值法与差分法	157	
第三十一计	★★★方阵问题	119	技巧(四):凑整法与公式法	161	
第三十二计	★★★过河爬井与空瓶换酒	122	第三十六计	★★★★七大题型	165
第三十三计	★★★对折与倍增	126	题型(一):计算类之 $\frac{A}{B}$ 型	165	
第三十四计	★★★统计术语	128	题型(二):计算类之 $\frac{A}{B} \times C$ 型	168	
术语(一):基期量与现期量、增长量与增长率	128		题型(三):计算类之 $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D}$ 型	171	
术语(二):同比和环比	133		题型(四):计算类之 $\frac{A}{B} - \frac{C}{D}$ 型	175	
术语(三):比重	136		题型(五):增长量大小比较	179	
术语(四):拉动增长率与增长贡献率	141		题型(六):增长率大小比较	183	
术语(五):平均增长率	143		题型(七):比重大小的比较	188	

第一计 ★★★★★代入排除法

黄金法则

代入排除法是公考行测第一大方法,拿到题目首先考虑能否代入排除。

破解密钥

代入排除法是指将选项直接代入,验证选项是否符合条件,或者排除错误选项,从而得出正确答案。代入排除法主要应用于多位数问题、不定方程问题、余数问题、年龄问题、复杂行程问题等。

最大值代入原则:

直接代入选项时,若题目要求的是“最多/最大”时,代入选项应从最大的数开始;若题目要求的是“最少/最小”时,代入选项应从最小的数开始。

数字特性原则:

常用的数字特性有奇偶特性、整除特性、尾数特性等。根据数字特性代入,是指根据题目中的条件,确定答案数字所具有的某种数字特性,排除不符合该特性的选项,从而缩小答案的范围再代入验证。

居中代入原则:

直接代入选项时,若选项中的数据为从小到大的均匀数字,一般选择大小居中的进行代入。若代入选项不正确,这时可以通过分析大小趋势进行选项的排除。

常识代入排除:

常识代入排除法是指不通过具体计算,只运用一定的常识,从而直接排除某些选项的方法。例如,若两种溶液混合后得到的浓度为10%,那么我们可以得出混合前的两种溶液,浓度肯定是一个大于10%,一个小于10%,从而可能排除某些不符合要求的选项。

魔力四射

【例 1】(2010 年广东)有一些信件,把它们平均分成三份后还剩 2 封,将其中两份平均三等分还多出 2 封,问这些信件至少有多少封?()

- A. 20 B. 26 C. 23 D. 29

【解析】本题可采用代入排除法,因为要求的是“至少”,代入时可以从最小的数字开始。A 选项,20 三等分后,每份为 6,两份为 12,再次三等分则没有剩余,排除。C 选项,23 三等分后,每份为 7,两份为 14,再次三等分后恰好还多出 2 封,符合。因此,本题答案选择 C 选项。

【总结提升】题型为“余数类”题型时,考虑使用代入法。

【例 2】(2009 年安徽)某住户安装了分时电表,白天电价是 0.55 元,夜间电价是 0.3 元,计划 7 月份用电 400 度,电费不超过 160 元,那么,白天用电不应超过多少度?()

- A. 160 B. 170 C. 180 D. 190

【解析】本题可采用代入排除法,选项数据均匀变化且数据易于计算,代入时应选择居中代入,然后根据所得结果,可判断出代入选项与正确答案的大小关系。首先,将 C 项代入,若白天使用了 180 度,则电费应为 $180 \times 0.55 + 220 \times 0.3 = 99 + 66 = 165 > 160$,则白天用电不能超过 180 度,C 项排除,同时也可以排除 D 项。代入 A 项,则 $160 \times 0.55 + 240 \times 0.3 = 160$,说明白天用电最多只能为 160 度。因此,本题答案选择 A 选项。

【例 3】甲班与乙班同学同时从学校出发去某公园,学校距离公园 96 千米。甲班步行的速度是每小时 4 千米,乙班步行的速度是每小时 3 千米。学校有一辆汽车,它的速度是每小时 48 千米,这辆汽车恰好能坐一个班的学生。为了使这两班学生在最短的时间内到达,那么,甲班学生与乙班学生需要步行的距离之比是()。

- A. 15 : 11 B. 17 : 22 C. 19 : 24 D. 21 : 27

【解析】本题采用常识代入排除法。甲班同学步行速度比乙班快,为了使两班同学在最短的时间内达到,显然甲班相对乙班步行的距离应该更长,选项中只有 A 项符合。因此,本题答案选择 A 选项。

【总结提升】复杂题目代入法,如难度较大的行程问题往往采用代入法进行解题。

【例 4】(2012 年河北事业单位)小明的妈妈买来一些糖果分给小明和弟弟,妈妈先给小明 1 块,再把剩下糖的 $\frac{1}{7}$ 给小明,然后给弟弟 2 块,又把剩下糖的 $\frac{1}{7}$ 给弟弟,这样两个人的糖果一样多,妈妈共买来多少块糖?()

- A. 34 B. 33 C. 36 D. 63

【解析】本题可首先通过**整除特性**,糖果的总数减去 1 后能被 7 整除,由此排除 A、D 两项。再将 B、C 两项代入题目中,可以得出 C 项符合题意。因此,本题答案选择 C 选项。

【总结提升】题干中有分数特征、比例特征往往采用代入法解题。

通关自测

【练习 1】(2010 年北京社招)某单位组织职工参加团体操表演,表演的前半段队形为中间一组 5 人,其他人按 8 人一组围在外圈;后半段队形变为中间一组 8 人,其他人按 5 人一组围在外圈。该单位职工人数为 150 人,则最多可有多少人参加?()

- A. 149 B. 148 C. 138 D. 133

【练习 2】将一个三位数的个位数字和百位数字调换后所得的三位数与原三位数的和是 1070,差是 198,这个三位数是()。

- A. 218 B. 327 C. 436 D. 524

【练习 3】从若干围棋子拿走 15 枚白棋子后,黑子与白子的个数之比为 $2:1$;再拿走 45 枚黑棋子后,黑子与白子的个数比为 $1:5$,则开始时黑棋子、白棋子各有()枚。

- A. 50,45 B. 50,40 C. 60,45 D. 60,50

【练习 4】训练时,若干名新兵站成一排,从 1 开始报数,除了甲以外其他人报的数之和减去甲报的数恰好等于 50,共有多少名新兵?()

- A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

自测答案

1. D 【解析】本题可用代入排除法解题,题目要求的是“最多”,则我们从最大的数开始代入。分析可知,前半段总人数满足减去 5 后是 8 的倍数,后半段总人数减去 8 后是 5 的倍数,代入选项易知 A、B、C 均不满足条件。D 选项,若有 133 人参加,减去 5 后是 8 的倍数,减去 8 后是 5 的倍数,符合题意。因此,本题答案选择 D 选项。

2. C 【解析】本题考查多位数问题,可采用代入排除法。A 项, $218+812=1030 \neq 1070$, 排除; B 项, $327+723=1050 \neq 1070$, 排除; C 项, $436+634=1070$, $634-436=198$, 符合题意。因此,答案选择 C 选项。

3. B 【解析】本题可采用代入排除法。拿走 15 枚白棋子后黑白比是 2:1,说明原来黑白棋数之和能被 3 整除,排除 A、D;拿走 60 枚后黑白比是 1:5,说明原来黑白棋数之和能被 6 整除,排除 C 项。因此,答案选择 B 选项。

4. B 【解析】本题宜用代入法,可以居中代入。设共有 n 名新兵,以 S_n 表示报数之和, x 表示甲的报数,易知 $x \leq n$, $S_n - 2x = 50$ 。C 选项, $n = 12$ 时, $S_n = \frac{12 \times 13}{2} = 78$, 解得 $x = 14 > n$, 不符合,说明 n 应该小于 12, 排除 C、D 两项。代入 B 项, $S_n = \frac{11 \times 12}{2} = 66$, 可得 $x = 8$ 。满足题意。因此,本题答案选择 B 选项。





数学黑洞——“西西弗斯串”

在古希腊神话中，科林斯国王西西弗斯被罚将一块巨石推到一座山上，但无论他怎么努力，这块巨石总是在到达山顶之前滚下来，于是他只好重新再推，永无休止。著名的“西西弗斯串”由此得名。事实上，任取一个数，如 35962，数出这个数中的偶数个数、奇数个数及所有数字个数分别为 2(2 个偶数)、3(3 个奇数)、5(5 位数)，用这三个数再任意组成一个数 235，对 235 重复上述程序，就会得 123，将 123 再重复进行，仍得 123，对这个程序和数的宇宙，123 就是一个数学黑洞，这就是数学黑洞——“西西弗斯串”。

第二计 ★★★★★ 整除判断法

黄金法则

熟练掌握常见特殊数的整除判断,如 2(5),4(25),8(125),3(9)的整除判断。

破解密钥

- (1) 整除判断法一般用于数字计算类、等差数列等题型,以及解方程的过程中。
 (2) 当题干中出现了分数、比例、倍数、整除等明显特征,此时一定要考虑整除判断。

特殊数字整除判定:

2(5)整除:观察数字的末位数字能否被 2(5)整除。

4(25)整除:观察数字的末两位数能否被 4(25)整除。

8(125)整除:观察数字的末三位数能否被 8(125)整除。

3(9)整除:观察各位数字之和能否被 3(9)整除。例如,283223 的各位数字和是 20,不能被 3 整除,故 283223 不能被 3 整除。

普通数字整除判定:

普通数字的整除判定,一般采用分解因式的方法进行快速判断。如判断一个数字能否被 6 整除,则需要判定该数能否被 2 和 3 整除;例如,判定 521 能否被 47 整除,可以将 521 分解为(470+51)进行判断。

分数比例形式:

若 $a : b = m : n$ (m, n 互质),则 a 是 m 的倍数, b 是 n 的倍数;若 $a = \frac{m}{n}b$ (m, n 互质),则 a 是 m 的倍数, b 是 n 的倍数。

魔力四射

【例 1】(2012 年江西)某单位组织员工旅游,要求每辆汽车坐的人数相同。如果每辆车坐 20 人,还剩下 2 名员工;如果减少一辆汽车,员工正好可以平均分到每辆汽车。问该单位共有几名员工? ()

- A. 244 B. 242 C. 220 D. 224

【解析】 本题考查方程问题。如果每辆车坐 20 人,还剩下两名员工,说明员工人数减去 2 后是 20 的倍数,选项中只有 B 项符合要求。因此,本题答案选择 B 选项。

【例 2】 (2011 年国考) 某公司去年有员工 830 人,今年男员工人数比去年减少 6%,女员工人数比去年增加 5%,员工总数比去年增加 3 人,问今年男员工有多少人? ()

- A. 329 B. 350 C. 371 D. 504

【解析】 本题可利用整除特性解题。由题意可得,今年男员工数是去年的 $94\% = \frac{47}{50}$,即今男 $\frac{47}{50}$ 去男,故今年男员工数可被 47 整除,只有 A 项满足。(D 项, $504 = 470 + 34$,不能被 47 整除;BC 项可以结合尾数法进行快速判定)。因此,答案选择 A 选项。

【例 3】 (2010 年北京) 某公司为客户出售货物,收取 3% 的服务费;代客户购置设备,收取 2% 的服务费。某客户委托该公司出售自产的某种物品并代为购置新设备。已知公司共收取该客户服务费 200 元,客户收支恰好平衡,则自产的物品售价是多少元? ()

- A. 3880 B. 4080 C. 3920 D. 7960

【解析】 本题题干中有分数特征。“收支平衡”指的是卖产品所获得的收益 = 买产品所需的花费,设客户自产的物品售价是 x 元,购置的新设备是 y 元。则由题意中的收支平衡得: $x(1-3\%) = y(1+2\%)$,化简得 $y = \frac{97x}{102}$,因为 97 与 102 互质,所以 x 必为 102 的整数倍,选项中只有 B 符合。

【例 4】 (2010 年江苏) 有 8 个盒子,分别装有 17 个、24 个、29 个、33 个、35 个、36 个、38 个和 44 个乒乓球,小赵先取走一盒,其余各盒被小钱、小孙和小李三人取走,已知小钱和小孙取走的乒乓球个数相同,并且是小李取走的两倍,则小赵取走的一盒乒乓球的个数是 ()。

- A. 24 B. 33 C. 35 D. 36

【解析】 本题考查方程问题。乒乓球总数为 $17+24+29+33+35+36+38+44=256$ (个),设小钱和小孙取走的乒乓球数都是 $2x$,小李取走的乒乓球数是 x ,那么小钱、小孙、小李取走的总数为 $5x$,即为乒乓球总数减小赵取走的乒乓球数,必为 5 的倍数,只有选项 D 项符合这个要求。因此,本题答案选择 D 项。

通关自测

【练习 1】一袋糖里装有奶糖和水果糖,其中奶糖的颗数占总颗数的 $\frac{3}{5}$ 。现在又装进 10 颗水果糖,这时奶糖的颗数占总颗数的 $\frac{4}{7}$ 。那么,这袋糖里有多少颗奶糖? ()

- A. 100 B. 112 C. 120 D. 122

【练习 2】某单位招录 10 名新员工,按其应聘成绩排名 1 到 10,并用 10 个连续的四位自然数依次作为他们的工号。若每个人的工号都能被他们的成绩排名整除,问排名第三的员工工号所有数字之和是多少? ()

- A. 9 B. 12 C. 15 D. 18

【练习 3】某店一共进货 6 桶油,分别为 15、16、18、19、20、31 千克,上午卖 2 桶,下午卖 3 桶,下午卖的钱正好是上午的 2 倍,剩下的一桶油重几千克? ()

- A. 15 B. 16 C. 18 D. 20

【练习 4】一单位组织员工乘车去泰山,要求每辆车上的员工数相等。起初,每辆车 22 人,结果有一人无法上车;如果开走一辆车,那么所有的旅行者正好能平均乘到其余各辆车上,已知每辆最多乘坐 32 人,请问单位有多少人去了泰山? ()

- A. 269 B. 352 C. 478 D. 529

自测答案

1. C **【解析】**奶糖的颗数占总颗数的 $\frac{3}{5}$,说明奶糖总数是 3 的倍数,选项中只有 C 项符合。
2. B **【解析】**排名第十的员工工号能被 10 整除,因此其工号的末位数字肯定是 0,因此第 1 名至第 10 名员工工号的尾数分别为:1,2, ..., 0,也就是说这 10 名员工的工号呈递增特征,排名第三的员工工号的数字之和比排名第九的员工工号数字之和小 6,因此排名第三的员工工号各数字之和加上 6 即为排名第九的员工工号数字之和,也就是说选项中的数字加上 6 必须能被 9 整除,而选项中只有 B 项符合。因此,本题答案选择 B 选项。



3. D 【解析】6 桶油总重量为 $15+16+18+19+20+31=119$ (千克), 下午卖的钱是上午的 2 倍, 说明下午卖的油重量是上午卖的 2 倍, 即已经卖的 5 桶油的重量和为 3 的倍数, 代入选项, 只有 D 项满足。所以选择 D 选项。

4. D 【解析】由题目可知, 总人数减去 1 后一定是 22 的倍数, 而选项中只有 D 项满足。因此, 本题答案选择 D 项。

第三计 ★★★★★ 奇偶特性法

黄金法则

只要出现了 $ax+by=c$ 的等量关系,一定要考虑能否使用奇偶特性法。

破解密钥

奇数 \pm 奇数=偶数,奇数 \pm 偶数=奇数。奇偶特性主要用于不定方程以及多元方程的求解。

二元等式的奇偶特性:

两数的和或差为奇数,则这两个数一奇一偶;两数的和或差为偶数,则这两个数同奇同偶。

两数的和为奇数,则其差一定也为奇数;两数的和为偶数,则其差一定也为偶数。

如:(1) $x+y=39$,两数之和为奇数,则其差 $(x-y)$ 也一定是奇数;

(2) $5x+4y=430$,由于 $4y$ 一定是偶数,而 430 也是偶数,所以 $5x$ 一定是偶数,进而可以得到 x 一定是偶数,且 $5x$ 的尾数一定是 0 。

魔力四射

【例 1】(2012 年国考)某儿童艺术培训中心有 5 名钢琴教师和 6 名拉丁舞教师,培训中心将所有的钢琴学员和拉丁舞学员共 76 人分别平均地分给各个老师带领,刚好能够分完,且每位老师所带的

三元等式的奇偶特性:

当运算数据的数量比较多时,判定思路是数奇数的个数:若奇数的个数为奇数个,则结果为奇数;若奇数的个数为偶数,则结果为偶数。

等式中含有三个量之间的加减运算时,往往还需要结合尾数判定来进一步地具体判定。如: $16x+10y+7z=150(x>y>z$,且都为非零自然数),分析可知: $16x$ 结果一定为偶数, $10y$ 结果一定为偶数, 150 为偶数,所以 $7z$ 一定是偶数,也就是 z 为偶数。 z 最小,所以可以假设 $z=2$,通过分析尾数可以得知 $x=6$,进而得到 $y=4$,即这个不定方程的解为: $x=6,y=4,z=2$ 。

学生数量都是质数。后来由于学生人数减少,培训中心只保留了4名钢琴教师和3名拉丁舞教师,但每名教师所带的学生数量不变,那么目前培训中心还剩下学员多少人? ()

- A. 36 B. 37 C. 39 D. 41

【解析】 本题考查不定方程问题。设每位钢琴老师带 x 人,拉丁舞老师带 y 人,则有 $5x+6y=76$ 。因为 $6y$ 和 76 都是偶数,得出 $5x$ 也是偶数,即 x 为偶数,而质数中只有2是偶数,因此可得出 $x=2$, $y=11$,因此还剩学员 $4\times 2+3\times 11=41$ (人)。因此,答案选择D选项。

【例2】 (2011年北京)小李用150元钱购买了16元一个的书包、10元一个的计算器 and 7元一支的钢笔寄给灾区儿童。如果他买的每一样物品数量都不相同,书包数量最多而钢笔最少,那么他买的计算器数量比钢笔多几个? ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【解析】 本题考查不定方程问题。设小李买了书包 x 个,计算器 y 个,钢笔 z 支,则可得 $16x+10y+7z=150$ 。因为 $16x$ 、 $10y$ 、 150 都是偶数,因此 $7z$ 是偶数,即 z 是偶数。 z 是小于 x 、 y 的,假设 $z=2$,由尾数法可判断出 $x=6$,进而得到 $y=4$ 。此时计算器数量比钢笔数多2。因此,本题答案选择B选项。

【例3】 (2009年浙江)现有6个一元面值硬币正面朝上放在桌子上,你可以每次翻转5个硬币(必须翻转5个),问你最少经过几次翻转可以使这6个硬币全部反面朝上? ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

【解析】 若要使6个硬币全部翻转到反面朝上,那么每个硬币必定翻转奇数次,6个奇数之和为偶数,因此排除A和C项。另外,每个硬币翻转的机会均等,平均到每个硬币的翻转次数应为 $\frac{5n}{6}$ 次,而要使硬币翻转后反面朝上,必须 $\frac{5n}{6}$ 为奇数,由此可排除D项。因此,本题答案选择B项。

【例4】 (2013年国考)小王参加了五门百分制的测验,每门成绩都是整数。其中语文94分,数学的得分最高,外语的得分等于语文和物理的平均分,物理的得分等于五门的平均分,化学的得分比外语多2分,并且是五门中第二高的得分。问小王的物理考了多少分? ()



A. 94

B. 95

C. 96

D. 97

【解析】外语的得分等于语文和物理的平均分,且成绩都是整数,语文是 94 分,所以物理的成绩肯定是偶数,排除 BD 选项。代入选项 A,若物理为 94 分,则语文=物理=外语=94,化学和数学分数都大于 94 分,那么五门的平均分肯定不是物理了,这与题干矛盾,排除 A 选项。因此,本题答案选择 C 选项。

通关自测

【练习 1】某地劳动部门租用甲、乙两个教室开展农村实用人才计划。两教室均有 5 排座位,甲教室每排可坐 10 人,乙教室每排可坐 9 人。两教室当月共举办该培训 27 次,每次培训均座无虚席,当月共培训 1290 人次。问甲教室当月共举办了多少次这项培训? ()

A. 8

B. 10

C. 12

D. 15

【练习 2】有一个四位数,能被 72 整除,其千位与个位之和为 10,个位数是为质数的偶数,去掉千位与个位得到一个新数为质数,这个四位数是多少? ()

A. 8676

B. 8712

C. 9612

D. 8532

【练习 3】有 7 个杯口全部向上的杯子,每次将其中 4 个同时翻转,经过几次翻转,杯口可以全部向下? ()

A. 3

B. 4

C. 5

D. 几次也不能

【练习 4】甲工人每小时可加工 A 零件 3 个或 B 零件 6 个,乙工人每小时可加工 A 零件 2 个或 B 零件 7 个。甲、乙两工人一天 8 小时共加工零件 59 个,甲、乙加工 A 零件分别用时为 x 小时、 y 小时,且 x, y 皆为整数,两名工人一天加工的零件总数相差:()

A. 6 个

B. 7 个

C. 4 个

D. 5 个

自测答案

1. D **【解析】**本题考查方程问题。设在甲教室培训了 x 次,在乙教室培训了 $(27-x)$ 次,则可得到 $50x+45 \times (27-x)=1290$ 。因为 $50x$ 和 1290 都是偶数,因此 $45 \times (27-x)$ 必须为偶数,则 $27-x$

必须为偶数, x 必须为奇数, 选项中只有 D 项符合。因此, 答案选择 D 选项。

2. B 【解析】由题目可知, 个位数是为质数的偶数, 则个位数是 2, 那么千位数应是 8, 排除 A、C 两项。四位数能被 72 整除, 即能被 8 整除, 而 8532 不能被 8 整除, 排除 D 项。因此, 本题答案选择 B 项。

3. D 【解析】每个杯子翻转奇数次才能使杯口改变方向, 所以 7 个杯子一共需要翻转的次数一定是奇数, 而 4 个杯子同时翻转的总翻转次数一定是偶数, 所以不可能把 7 个杯子的杯口都掉转。因此, 本题选择 D 选项。

4. B 【解析】分析题干可知, 甲与乙的和是 59 个, 为奇数, 那么甲与乙的差一定是奇数, 排除 AC 选项。代入 B 选项, 可得到甲 = 33 个, 乙 = 26 个, 进而可得
$$\begin{cases} 3x + 6(8 - x) = 33 \\ 2y + 7(8 - y) = 26 \end{cases}, \text{解得 } \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}, \text{满足}$$
 题干要求。因此, 本题答案选择 B 选项。

第四计 ★★★★★ 赋值法

黄金法则

赋值法以便于运算、取整运算为原则,若题干中有分数,则赋值要选取分母的倍数;若题干中有比例特征,则根据比例倍数进行赋值。

破解密钥

题干中出现了分数、比例、倍数时,要考虑赋值法。

赋值法主要应用于分数应用题、工程问题、行程问题以及费用问题等题型中。

赋值法基本原则:

(1) 题干中的数据没有单位,只有比例关系时,可以使用赋值法简化计算;

(2) 题干中的数据有单位,但是单位只有一种,且与其他数据有比例关系时,可以使用赋值法简化计算。若所赋值的单位与题干发生冲突,可以灵活采用赋“份数”来代替;

(3) 题干中出现了分数,赋值的基本原则是赋整数,所赋数字为分母的倍数。有多个分数的话,所赋值为分母的最小公倍数,

(4) 题干中呈现的是数量之间的比例关系,那么根据比例关系赋值,进行整数赋值。

魔力四射

【例 1】(2009 年联考)一块试验田,以前这块地所种植的是普通水稻。现在将该试验田的 $\frac{1}{3}$ 种上超级水稻,收割时发现该试验田水稻总产量是以前总产量的 1.5 倍,如果普通水稻的产量不变,则超级水稻的平均产量与普通水稻的平均产量之比是? ()

A. 5 : 2

B. 4 : 3

C. 3 : 1

D. 2 : 1

【解析】本题特征是题干中没有具体单位,量与量之间关系满足:总产量=平均产量×面积。设试



验田有3,普通水稻亩产量为2,超级水稻的种植面积为 $1/3 \times 3 = 1$,总产量 $= 1.5 \times 3 \times 2 = 9$,超级水稻的产量 $= 9 - 2 \times 2 = 5$,超级水稻与普通水稻的平均亩产量为 $5 : 2$ 。因此,本题答案选择A选项。

【例2】(2012年国考)2010年某种货物的进口价格是15元/公斤,2011年该货物的进口量增加了一半,进口金额增加了20%。问2011年该货物的进口价格是多少元/公斤?()

- A. 10 B. 12 C. 18 D. 24

【解析】本题考查基本方程问题,量与量之间关系满足:进口金额=进口价格 \times 进口量。根据“进口量增加了一半”,可直接设2010年的进口量为2,则2011年的进口量为3,2010年的进口金额为 $15 \times 2 = 30$,2011年的进口金额为 $30 \times 120\% = 36$,则进口价格为 $36 \div 3 = 12$ 。因此,本题答案选择B选项。

【例3】(2007年山东)王浩在一次村委会选举中,需 $2/3$ 的选票才能当选,当统计完 $3/5$ 的选票时,他得到的选票数已达到当选票数的 $3/4$,他还需要得到剩下选票的几分之几才能当选?()

- A. $7/10$ B. $8/11$ C. $5/12$ D. $3/10$

【解析】本题考查计算问题,量之间关系满足:选票数=总票数 \times 比例。题干中只出现了分数,设选票共有60张(分母的最小公倍数),则需要 $60 \times 2/3 = 40$ (张)可以当选。已经统计完 $60 \times 3/5 = 36$ (张),得到 $40 \times 3/4 = 30$ (张)。需要得到10张才可当选, $10/24 = 5/12$ 。因此,答案选择C选项。

【例4】(2011年国考)甲、乙、丙三个工程队的效率比为 $6 : 5 : 4$,现将A、B两项工作量相同的工程交给这三个工程队,甲队负责A工程,乙队负责B工程,丙队参与A工程若干天后转而参与B工程,两项工程同时开工,耗时16天同时结束。问丙队在A工程中参与施工多少天?()

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

【解析】本题考查工程问题,量与量关系满足:工作量=效率 \times 时间。设甲、乙、丙三个工程队的效率分别为6、5、4,则每项工程的量为 $(6+5+4) \times 16 \div 2 = 120$,甲完成的工作量为 $6 \times 16 = 96$,则丙在A工程中完成的工作量为 $120 - 96 = 24$,丙参与A工程的时间为 $24 \div 4 = 6$ (天)。因此,答案选择A选项。

 通关自测

【练习 1】受原材料价格上涨影响,某产品的总成本比之前上涨了 $\frac{1}{15}$,而原材料成本在总成本中的比重提高了 2.5 个百分点。问原材料的价格上涨了多少? ()

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{11}$ D. $\frac{1}{12}$

【练习 2】一艘游轮从甲港口顺水航行至乙港口需 7 小时,从乙港口逆水航行至甲港口需 9 小时。问如果在静水条件下,游轮从甲港口航行至乙港口需多少小时? ()

- A. 7.75 B. 7.875 C. 8 D. 8.25

【练习 3】甲、乙、丙、丁四个队共同植树造林,甲队造林的亩数是另外三个队造林总亩数的 $\frac{1}{4}$,乙队造林的亩数是另外三个队造林总亩数的 $\frac{1}{3}$,丙队造林的亩数是另外三个队造林总亩数的一半,已知丁队共造林 3900 亩,问甲队共造林多少亩? ()

- A. 9000 B. 3600 C. 6000 D. 4500

【练习 4】一项工程由甲、乙、丙三个工程队共同完成需要 15 天,甲队与乙队的工作效率相同,丙队 3 天的工作量与乙队 4 天的工作量相当。三队同时开工 2 天后,丙队被调往另一工地,甲、乙两队留下继续工作。那么,开工 22 天以后,这项工程()。

- A. 已经完工
B. 余下的量需甲乙两队共同工作 1 天
C. 余下的量需乙丙两队共同工作 1 天
D. 余下的量需甲乙丙三队共同工作 1 天

 自测答案

1. A 【解析】本题考查经济利润问题,题干中只有分数,量与量关系满足:比重 = 价格 ÷ 总成本。设原成本为 15,涨价后成本为 16,即总成本上涨了 1,设原材料的原价格为 x ,根据题意, $\frac{x+1}{16}$

$\frac{x}{15} = 2.5\%$, 解得 $x = 9$, 增长了 $\frac{1}{9}$ 。因此, 答案选择 A 选项。

2. B 【解析】本题考查行程问题, 题干中数据只有一种单位, 量与量关系满足: 路程 = 速度 × 时间。设甲港口到乙港口的距离为 63, 则顺水速 = 船速 + 水速 = $63 \div 7 = 9$, 逆水速 = 船速 - 水速 = $63 \div 9 = 7$, 则船速 = 静水速 = 8, 水速 = 1, 则静水时需要的时间 = $63 \div 8 = 7.875$ 。因此, 答案选择 B 选项。

3. B 【解析】本题考查计算问题。由题意可知, 甲队造林占整体的 $\frac{1}{5}$, 乙队造林占整体的 $\frac{1}{4}$, 丙队造林占整体的 $\frac{1}{3}$, 设整体为 60 份, 则甲占 12 份, 乙占 15 份, 丙占 20 份, 则丁队占 13 份。根据 13 份 = 3900, 则甲队 = 12 份 = 3600。因此, 答案选择 B 选项。

4. D 【解析】本题考查工程问题, 量与量关系满足: 工作量 = 效率 × 时间。由条件知乙与丙的工作效率比是 3 : 4, 所以可设甲、乙、丙的工作效率分别为 3、3、4, 则工程总量为 $(3+3+4) \times 15 = 150$, 则开工 22 天后共完成工作量为 $(3+3+4) \times 2 + (3+3) \times 20 = 20 + 20 \times 6 = 140$, 所以剩下的工作量为 10, 需要甲乙丙合作一天完成。因此, 答案选择 D 选项。



奇怪的遗嘱

相传一位老人临终立下遗嘱, 规定 3 个儿子可分掉他的 17 头牛, 但规定老大得总数的 $\frac{1}{2}$, 老二得总数的 $\frac{1}{3}$, 老三得总数的 $\frac{1}{9}$, 大家想半天仍未解决。一天有个老农牵头牛经过, 听说后, 想了一会, 说道: “我把这头牛借给你们, 分完后再把这头牛还给我就行了”。结果, 老大分到 9 头牛, 老二分到 6 头牛, 老三分到 2 头牛, 还剩一头牛正好归还。你能找出其中的原因吗?

第五计 ★★★ 工程问题

黄金法则

工作量 = 工作效率 × 工作时间，其中工作效率是工程问题的核心。

破解密钥

工程问题研究的是工作量、工作时间和工作效率之间的关系，解题的关键往往是求出工作效率，进而找到解题的思路。常用解法有赋值法、代入法以及列方程求解。

工作量 = 工作效率 × 工作时间

解决工程问题的思路就是依据上述等量关系列等式，进而找到题目的答案。在具体操作过程中主要有以下三种题型：

已知完成工作时间：

题干特征是已知每个人完成工作所需的时间，此时采用“赋值法”解决。令工作量为工作时间的最小公倍数，进而得到每个人的工作效率，列出等量关系，进而得出答案。

已知工作效率等量关系：

题干特征是没有告诉每个人完成工作的时间，而是告诉他们之间工作效率的等量关系，此时采用“赋值法”解决。根据工作效率的等量关系直接赋值工作效率为具体的数值，列出等量关系，进而得到答案。

其他题型：

若题干不符合上述两种情况，一般选择列方程解题，工作效率设为未知数，列出等量关系，进而找到效率之间的等量关系，从而得到题目的答案。

魔力四射

【例 1】(2011 年国考)同时打开游泳池的 A、B 两个进水管，加满水需 1 小时 30 分钟，且 A 管比 B 管多进水 180 立方米。若单独打开 A 管，加满水需 2 小时 40 分钟。则 B 管每分钟进水多少立方

米? ()

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

【解析】 本题考查工程问题, 题干中已知完成工作的工作时间。同时打开 A、B 需要 90 分钟, 打开 A 需要 160 分钟, 设总量 = $9 \times 10 \times 16$ 份, 则效率 A + 效率 B = 16 份, 效率 A = 9 份, 进而得知效率 B = 7 份, 即 B 管的每分钟进水量是 7 的倍数。因此, 本题答案选择 B 选项。

【例 2】 (2012 年北京) 某市有甲、乙、丙三个工程队, 工作效率比为 3 : 4 : 5。甲队单独完成 A 工程需要 25 天, 丙队单独完成 B 工程需要 9 天。现由甲队负责 B 工程, 乙队负责 A 工程, 而丙队先帮甲队工作若干天后转去帮助乙队工作。如希望两个工程同时开工同时竣工, 则丙队要帮乙队工作多少天? ()

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

【解析】 本题属于工程问题。设甲效率为 3, 乙效率为 4, 丙效率为 5。则可得出 A 工程的工作量为 $25 \times 3 = 75$, B 工程为 $5 \times 9 = 45$ 。由于两个工程同时完成, 则总天数是 $(75 + 45) \div 12 = 10$ (天)。乙做 10 天完成 40, 剩下 35 丙去完成, 所以丙帮乙队做了 $35 \div 5 = 7$ (天)。因此, 答案选择 B 选项。

【例 3】 (2012 年北京) 三个快递员进行一堆快件的分拣工作, 乙和丙的效率都是甲的 1.5 倍。如果乙和丙一起分拣所有的快件, 将能比甲和丙一起分拣提前 36 分钟完成。问如果甲乙丙三人一起工作, 需要多长时间能够完成所有快件的分拣工作? ()

A. 1 小时 45 分

B. 2 小时

C. 2 小时 15 分

D. 2 小时 30 分

【解析】 本题考查工程问题。设甲的效率是 2, 则乙、丙的效率都是 3。设总量是 x , 由题意有: $\frac{x}{5} - \frac{x}{6} = 36$, 解得 $x = 36 \times 30$, 由题意知三人一起分拣的时间是 $x \div 8 = 135$ (分), 即 2 小时 15 分。因此, 答案选择 C 选项。

【例 4】 (2013 年北京) 一项工程如果交给甲乙两队共同施工, 8 天能完成; 如果交给甲丙两队共同施工, 10 天能完成; 如果交给甲丁两队共同施工, 15 天能完成; 如果交给乙丙丁三队共同施工, 6 天就可以完成。如果甲队独立施工, 需要多少天完成? ()

- A. 16 B. 20 C. 24 D. 28

【解析】本题考查工程问题,题干中已知完成工作的工作时间。赋值总工程量是 120,可得关于甲乙丙效率的方程组:

$$\begin{cases} \text{甲} + \text{乙} = 15 \\ \text{甲} + \text{丙} = 12 \\ \text{甲} + \text{丁} = 8 \\ \text{乙} + \text{丙} + \text{丁} = 20 \end{cases}$$

, $3 \text{甲} = (\text{甲} + \text{乙}) + (\text{甲} + \text{丙}) + (\text{甲} + \text{丁}) - (\text{乙} + \text{丙} + \text{丁})$,解得甲的效率为 5,

甲单独做需要 $120 \div 5 = 24$ 天。因此,本题答案选择 C 选项。

通关自测

【练习 1】某蓄水池有一进水口 A 和一出水口 B,池中无水时,打开 A 口关闭 B 口,加满整个蓄水池需 2 小时;池中满水时,打开 B 口关闭 A 口,放干池中水需 1 小时 30 分钟。现池中有占总容量 $\frac{1}{3}$ 的水,问同时打开 A、B 口,需多长时间才能把蓄水池放干? ()

- A. 90 分钟 B. 100 分钟 C. 110 分钟 D. 120 分钟

【练习 2】某项工程由 A、B、C 三个工程队负责施工,他们将工程总量等额分成了三份同时开始施工。当 A 队完成了自己任务的 90% 时, B 队完成了自己任务的一半, C 队完成了 B 队已完成任务量的 80%, 此时 A 队派出 $\frac{2}{3}$ 的人力加入 C 队工作。问 A 队和 C 队都完成任务时, B 队完成了其自身任务的 ()。

- A. 80% B. 90% C. 60% D. 100%

【练习 3】王师傅计划用 2 小时加工一批零件,当还剩 160 个零件时,机器出现故障,效率比原来降低 $\frac{1}{5}$, 结果比原计划推迟 20 分钟完成任务,这批零件有 () 个。

- A. 240 B. 200 C. 160 D. 150

【练习 4】一口水井,在不渗水的情况下,甲抽水机用 4 小时可将水抽完,乙抽水机用 6 小时可将水抽完。现用甲、乙两台抽水机同时抽水,但由于渗水,结果用了 3 小时才将水抽完。问在渗水的情况

下,用乙抽水机单独抽,需要几小时抽完? ()

- A. 12 小时 B. 13 小时 C. 14 小时 D. 15 小时

自测答案

1. D 【解析】本题考查工程问题,题干中已知完成工作的工作时间。打开 A 口需 2 小时,打开 B 口需 1.5 小时,则可设水池中的水总量是 3,那么 A 口得效率为+1.5,B 口的效率为-2。因此两口同开,总效率为-0.5。现在水池中的水量为 $3 \times 1/3 = 1$,所需时间为 $1 \div 0.5 = 2$ (小时)。因此,答案选择 D 选项。

2. A 【解析】本题考查工程问题,题干中暗含三队之间的效率比例关系。设工作总量为 300,则 A 队完成 90 时,B 队完成 50,C 队完成 40,则可设三队的原效率分别为 90,50,40,则新效率为 30,50,100。三队剩余的工作量分别为 10,50,60,三队分别还需要时间 $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \frac{50}{50} = 1, \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$,当 A 队、C 队均完成,B 队又完成的工作量为 $50 \times \frac{3}{5} = 30$,B 队完成工作量所占比重 $= \frac{50+30}{100} = 80\%$ 。因此,答案选择 A 选项。

3. A 【解析】本题考查工程问题,题干中已知效率的比例关系。设王师傅原来的效率是 $5x$,则后来的效率是 $5x \times (1 - \frac{1}{5}) = 4x$,根据题意, $\frac{160}{4x} - \frac{160}{5x} = \frac{1}{3}$,解得 $x = 24$,则工作总量 $= 2 \times 5x = 240$ 。因此,答案选择 A 选项。

4. A 【解析】本题考查工程问题,题干中已知完成工作的工作时间。赋值工作总量为 12,则甲的效率为 3,乙的效率为 2,在渗水的情况下甲乙的总效率是 4,进而可以得出渗水的效率是-1,那么在渗水的情况下,乙单独工作 $12 \div (2-1) = 12$ 小时。因此,答案选择 A 选项。



托尔斯泰最欣赏的一道数学题

“一些割草人在两块草地上割草，大草地的面积比小草地大一倍，上午，全体割草人都在大草地上割草，下午他们对半分开，一半人留在大草地上，到傍晚时把剩下的草割完，另一半人到小草地上割草，到傍晚还剩下小块没割完，这一小块第二天由一个割草人割完，假定每半天劳动时间相等，每个割草人工作效率相等，问共有多少割草人？”



第六计 ★★★尾数法

黄金法则

尾数法适用的运算包括加法、减法、乘法以及乘方运算。

应用题型：数字类计算题，容斥原理等。

破解密钥

- (1) 选项尾数不同，且运算过程为加、减、乘、乘方运算，优先使用尾数进行判定；
- (2) 所需计算数据多，计算复杂时考虑尾数判断快速得答案。

尾数法则：

(1) 应用尾数法时，需注意尾数所对应数位，避免小数运算尾数为 0 而带来的风险；(2) 除法运算需转化为乘法运算后，才能进行尾数判定。

乘方尾数法则：

求取 A^n 的个位数，采用口诀进行判定：底数只留个位，指数除以 4 留余数，余数为 0 时，换成 4。如： $1997^{1997} \rightarrow 7^1$ ，得到尾数为 7。

魔力四射

【例 1】(2012 年安徽) 计算 $110.1^2 + 1210.3^2 + 1220.4^2 + 1260.8^2$ 的值为()。

- A. 4555940.8 B. 4555940.9 C. 4555941.18 D. 4555940.29

【解析】本题考查数字类计算题。观察选项可以得到选项的末两位不同，故而可以通过末两位尾数判断得到答案。原式计算所得末两位尾数为： $0.01 + 0.09 + 0.16 + 0.64 = 0.90$ ，故原数末两位是 90。

【拓展】数字类计算题常用的方法有：尾数法、估算法、弃 9 法，以及提取公因式、公式法等。

【例 2】(2007 年北京) 计算 $(873 \times 477 - 198) \div (476 \times 874 + 199)$ 的值是()。

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【解析】本题考查数字类计算题。本题正面计算较为复杂，考虑尾数法。

解法一:尾数法,除法不能直接使用尾数法,先化除为乘,即得到: $873 \times 477 - 198 = (476 \times 874 + 199) \times \text{答案}$ 。等式左边尾数为 3,则右边等式尾数一定也为 3,等式右边尾数由 3 与答案的乘积决定,所以答案只能是 1。因此,答案选择 A 选项。

解法二:估算法,分析发现 873×477 与 476×874 的计算结果大小差不多,且远大于 198 或 199,因此分子与分母的大小是相当的。因此,答案选择 A 选项。

【例 3】(2008 年广东) $2008^{2008} + 2009^{2009}$ 的个位数是()。

- A. 3 B. 5 C. 7 D. 9

【解析】本题考查数字类计算。根据公式, $2008^{2008} \rightarrow 8^4$, 尾数为 6, $2009^{2009} \rightarrow 9^1$, 尾数为 9, 则尾数之和的尾数为 5。因此,答案选择 B 选项。

通关自测

【练习 1】 $(1, 1)^2 + (1, 2)^2 + (1, 3)^2 + (1, 4)^2$ 的值是()。

- A. 5.04 B. 5.49 C. 6.06 D. 6.30

【练习 2】 $292929 \div 161616 \times 112 = ()$ 。

- A. 174 B. 190 C. 203 D. 206

【练习 3】 $9^9 + 19^{19} + 99^{99}$ 的个位数字是()。

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 7

【练习 4】 $\frac{10101}{131313} \times 91$ 的值是:()。

- A. 7 B. 5 C. 4 D. 2

自测答案

1. D 【解析】本题考查数字类计算。观察选项,末一位尾数各不相同,四项的尾数分别为 1、4、9、6,尾数之和的尾数为 0。因此,答案选择 D 选项。

2. C 【解析】本题考查数字类计算。将 $292929 \div 161616 \times 112$ 化除为乘,即 $292929 \times 112 =$



$161616 \times$ 答案, 左侧两项积的尾数为 8, 则要求 161616 乘以答案得到的尾数为 8, 选项中只有 C 符合条件。因此, 答案选择 C 选项。

3. D 【解析】本题考查乘方尾数计算。 $9^9 \rightarrow 9^1$, 尾数为 9, $19^{19} \rightarrow 9^3$, 尾数为 9, $99^{99} \rightarrow 9^3$, 尾数为 9, 尾数之和的尾数为 7。因此, 答案选择 D 选项。

4. A 【解析】本题考查数字类计算。

解法一: 将 $10101 \times 91 \div 131313$ 化除为乘, 即 $10101 \times 91 = 131313 \times$ 答案, 左侧两项乘积尾数为 1, 答案中只有 A 满足与 131313 乘积尾数为 1。因此, 答案选择 A 选项。

解法二: 分析题干可知, $131313 = 13 \times 10101$, 所以原式变为 $91 \div 13 = 7$ 。因此, 答案选择 A 选项。

第七计 ★★★裂项相消

黄金法则

$$\frac{b}{m \times (m+a)} = \frac{b}{a} \times \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+a} \right)$$

破解密钥

题干表述为多个分式或分数相加,各项分母可表示成两数或多数相乘;考虑裂项相消。

两项分母裂项:

$$\text{基本公式: } \frac{1}{xy} = \frac{1}{y-x} \times \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) (x < y);$$

$$\frac{b}{m(m+a)} + \frac{b}{(m+a)(m+2a)} + \dots + \frac{b}{(n-a)n} = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) \times \frac{b}{a}.$$

三项分母裂项:

$$\frac{b}{m(m+a)(m+2a)} = \frac{b}{2a} \times \left[\frac{1}{m(m+a)} - \frac{1}{(m+a)(m+2a)} \right];$$

$$\frac{b}{m(m+a)(m+2a)} + \frac{b}{(m+a)(m+2a)(m+3a)} + \dots + \frac{b}{(n-2a)(n-a)n} = \left[\frac{1}{m(m+a)} - \frac{1}{n(n-a)} \right] \times \frac{b}{2a}.$$

魔力四射

【例 1】(2011 年河北) 计算 $\frac{1}{12 \times 13} + \frac{1}{13 \times 14} + \dots + \frac{1}{19 \times 20}$ 的值为()。

A. $\frac{1}{10}$

B. $\frac{1}{20}$

C. $\frac{1}{30}$

D. $\frac{1}{40}$

【特征】 本题考查分数类计算。根据裂项相消公式,原式可变为: $\frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{19} -$

$\frac{1}{20}$,可以发现中间的计算数据全部相互抵消,只剩下了首项和末项,即 $\frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{1}{30}$ 。因此,答案选择

C选项。

【例2】 计算 $\frac{5}{1 \times 2 \times 3} + \frac{5}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{5}{13 \times 14 \times 15}$ 的值为()。

A. $\frac{21}{26}$

B. $\frac{26}{53}$

C. $\frac{26}{21}$

D. $\frac{53}{26}$

【解析】 本题考查分数类计算,采用裂项相消法。根据基本公式,原式可变为: $(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{14 \times 15}) \times$

$\frac{5}{2} = \frac{26}{21}$ 。

因此,答案选择C选项。

通关自测

【练习1】 $2008 \frac{1}{18} + 2009 \frac{1}{54} + 2010 \frac{1}{108} + 2011 \frac{1}{180} + 2012 \frac{1}{270} = ()$ 。

A. $10050 \frac{5}{54}$

B. $10052 \frac{7}{135}$

C. $10051 \frac{269}{270}$

D. $10051 \frac{1}{54}$

【练习2】 $\frac{1}{1 \times 3 \times 5} + \frac{1}{3 \times 5 \times 7} + \frac{1}{5 \times 7 \times 9} + \dots + \frac{1}{21 \times 23 \times 25} = ()$ 。

A. $\frac{2}{525}$

B. $\frac{572}{6900}$

C. $\frac{4}{575}$

D. $\frac{968}{12075}$

自测答案

1. A 【解析】本题考查分数计算。原式 = $2008 + 2009 + 2010 + 2011 + 2012 + \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{6 \times 9} + \frac{1}{9 \times 12} + \frac{1}{12 \times 15} + \frac{1}{15 \times 18} = 2010 \times 5 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{18} \right) = 10050 \frac{5}{54}$ 。因此,答案选择 A 选项。

2. B 【解析】本题考查分数计算。根据三项裂项的公式,原式 = $\left(\frac{1}{1 \times 3} - \frac{1}{23 \times 25} \right) \times \frac{1}{4} = \frac{572}{6900}$ 。因此,答案选择 B 选项。



国王赏麦

印度传说:舍罕王打算奖赏国际象棋的发明人——本国宰相,宰相就对国王说:“陛下,请您在这张棋盘的第一个小格里赏给我一粒麦子,第二个小格里两粒麦子,第三个小格里四粒麦子,以后每小格赏给的比前一个小格多一倍,六十四格放满了,也就是我要的奖赏了”。国王以为很简单,可结果发现把全印度,甚至全世界的麦子拿来也供应不了宰相的要求。那么,国王到底应奖励发明人多少粒麦子?

第八计 ★★★等差数列

黄金法则

相邻两项的差为一个常数的数列称为等差数列,此常数称为公差。

破解密钥

题干中出现了“每……比……多(少) n 个”或者“连续的……”等描述时,此题的考点一定是等差数列。公考中等差数列主要考查等差数列求和,方法为公式法或代入法。

求和公式:

和 $=1/2(\text{首项}+\text{末项})\times\text{项数}=\text{平均数}\times\text{项数}$
 数 $=\text{中位项}\times\text{项数}$,由公式可知:平均数 $=\text{中位项}$ 。

级差公式:

第 N 项 $-$ 第 M 项 $= (N-M)\times\text{公差}$

奇数求和公式:

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1)=n^2$$

魔力四射

【例 1】(2012 年北京)某条公交线路上有 10 个车站,一辆公交车在始发站上了 12 个人,在随后每一站上车的人数都比上一站少 1 人。到达终点站时,所有乘客均下了车。如果每个车站下车乘客数相同,那么有多少人在终点站下车? ()

A. 7

B. 9

C. 10

D. 8

【题眼】由“每一站上车的人数都比上一站少 1 人”确定本题考查等差数列。

【解析】本题考查等差数列问题。始发站下车人数为 0,终点站上车人数为 0,可以得到公交车上

项数公式:

$$\text{项数}=(\text{末项}-\text{首项})\div\text{公差}+1$$

对称公式:

$$\text{若 } m+n=i+j, \text{ 则 } a_m+a_n=a_i+a_j$$

人的次数与下人的次数均为 9 次。上车人数呈等差数列规律,数列首项=12,末项=4,因而一共上车的人数= $\frac{(12+4)\times 9}{2}=72$ (人)。这 72 人是分 9 次平均下车的,因此每站下车人数=72÷9=8(人)。

因此,答案选择 D 选项。

【例 2】(2010 年江苏)在连续奇数 1,3,⋯,205,207 中选取 N 个不同数,使得它们的和为 2359,那么 N 的最大值是()。

- A. 47 B. 48 C. 50 D. 51

【题眼】由“连续奇数”确定本题考查等差数列。

【解析】根据奇偶特性,两个奇数的和为偶数, N 个奇数的和是 2359,2359 为奇数,因此 N 为奇数,排除 B、C 两项。根据奇数求和基本公式可知,从 1 开始的 51 个连续奇数的和为 $51\times 51=2601$,而任意选取 51 个奇数的和至少为 2601,已经超过了 2359,排除 D 项。因此,答案选择 A 选项。

【例 3】(2008 年国考) $\{a_n\}$ 是一个等差数列, $a_3+a_7-a_{10}=8$, $a_{11}-a_4=4$,则数列前 13 项之和为()。

- A. 32 B. 36 C. 156 D. 182

【解析】本题考查等差数列 $a_{10}-a_3=a_{11}-a_4=4$, $a_3+a_7-a_{10}=a_7-4=8$,则 $a_7=12$,第 7 项为前 13 项的中位项,前 13 项的和= $13\times a_7=13\times 12=156$ 。因此,答案选择 C 选项。

【例 4】(2012 年浙江)四个连续奇数的和为 32,则他们的积为多少?()

- A. 945 B. 1875 C. 2745 D. 3465

【解析】本题考查等差数列,四个连续奇数的和为 32,中位数是 $32\div 4=8$,因此四个数是 5、7、9、11。可算出这四个数的积是 $5\times 7\times 9\times 11=35\times 99=3465$ 。因此,答案选择 D 选项。

《 通关自测 》

【练习 1】有一堆钢管,最下面一层有 30 根,逐层向上递减一根,这堆钢管最多有多少根?()

- A. 450 B. 455 C. 460 D. 465



【练习 2】 $\{a_n\}$ 是一个等差数列, 若 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 250$, 则 $a_2 + a_8$ 的值为()。

- A. 50 B. 100 C. 150 D. 200

【练习 3】一个等差数列共有 $2N-1$ 项, 所有奇数项的和为 36, 所有偶数项的和为 30, 那么 N 的值为()。

- A. 5 B. 6 C. 10 D. 11

【练习 4】小李用几天时间看完了一本 400 页的书, 第一天看 30 页, 然后每天比前一天多看 20 页。在小李看书这几天的前半段时间(按整天计算), 小李一共看了()页。

- A. 130 B. 150 C. 170 D. 190

自测答案

1. D 【解析】本题考查等差数列。钢管最多时即最上面一层的钢管数为 1 时, 结合等差数列的求和公式, 共有钢管 $\frac{(1+30) \times 30}{2} = 465$ (根)。因此, 答案选择 D 选项。

2. B 【解析】本题考查等差数列。 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = (a_3 + a_7) + (a_4 + a_6) + a_5 = 5a_5 = 250$, 则 $a_5 = 50$, $a_2 + a_8 = 2a_5 = 2 \times 50 = 100$ 。因此, 答案选择 B 选项。

3. B 【解析】本题考查等差数列。奇数项和一偶数项和 $= 36 - 30 = 6$, 根据等差数列的性质, 6 即等差数列的中位项。等差数列的和 $= 36 + 30 = 66$, 则项数 $= 2N - 1 = 66 \div 6 = 11$, 解之可得 $N = 6$ 。因此, 答案选择 B 选项。

4. B 【解析】本题考查等差数列。设小李看完这本书需要 x 天, 根据题意可得 $30x + x(x-1) \times 20 \div 2 = 400$, 解得 $x = 6$ 。因此小李前半段时间即 3 天看了 $30 + 50 + 70 = 150$ (页)。因此, 答案选择 B 选项。



诸葛亮的神机妙算

相传有一天,诸葛亮把将士们召集在一起,说:“你们中间不论谁,从1~1024中任意选出一个整数,记在心里,我提出十个问题,只要求答‘是’或‘不是’。十个问题全答完以后,我就会‘算’出你心里记的那个数。”诸葛亮刚说完,一个谋士站起来说,我已经选好了一个数。

诸葛亮问道:“你选的数大于512?”谋士答:“不是。”诸葛亮又接连向这个谋士提了九个问题,谋士都一一作了回答。诸葛亮最后说:“你记的那个数是1。”谋士听了极为惊奇,因为这个数果真是他选的数。

你知道诸葛亮是怎样妙算的吗?



第九计 ★★★ 因数倍数

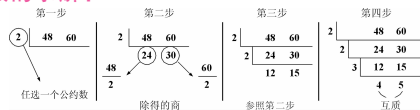
黄金法则

$A = a \times b \times c$, 则 A 是 a 、 b 、 c 的公倍数, a 、 b 、 c 为 A 的约数(或因数)。

破解密钥

题干中出现了“每隔……”、“每经……”等含“每”的字眼时,经常要考虑最小公倍数;当题目要求对定长进行等分,求“最少”的段数、植树的棵数或安装物体的数量等,要考虑最大公因数。

两数的求解:



最大公因数 = $2 \times 2 \times 3 = 12$ (第四步左侧的三个数字的乘积); 最小公倍数 = $2 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 240$ (第四步左侧的三个数字与下边两个数字的乘积)。

三数的求解:

(1) 如果求其最大公因数则可以通过下述短除法:

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 60 \quad 72 \quad 90} \\ 3 \overline{) 30 \quad 36 \quad 45} \\ 10 \quad 12 \quad 15 \end{array}$$

其最大公因数 = $2 \times 3 = 6$

【注】注意此时 10 与 12、12 与 15、10 与 15 均不互质(事实上 10 与 12、12 与 15、10 与 15 的最大公因数分别为 2、3、5), 但 10、12、15 这三个数互质, 短除法即结束。

(2) 如果求其最小公倍数则可以通过下述短除法:

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 60 \quad 72 \quad 90} \\ 3 \overline{) 30 \quad 36 \quad 45} \\ 2 \overline{) 10 \quad 12 \quad 15} \\ 3 \overline{) 5 \quad 6 \quad 15} \\ 5 \overline{) 5 \quad 2 \quad 5} \\ 1 \overline{) 1 \quad 2 \quad 1} \end{array}$$

5 不能被 3 整除, 保留; 15 不能被 2 整除, 保留; 2 不能被 5 整除, 保留。

其最小公倍数 = $2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 1 \times 2 \times 1 = 360$

【注意】虽然 10、12、15 这三个数互质, 但并不两两互质。此时为了求原数组的最小公倍数, 可以先除以其中两个数的最大公因数(不能除尽的保留), 直至这些数两两互质。

分数的最大公约数：

分数的最大公约数 = $\frac{\text{各分数分子的最大公约数}}{\text{各分数分母的最小公倍数}}$

分数的最小公倍数：

分数的最小公倍数 = $\frac{\text{各分数分子的最小公倍数}}{\text{各分数分母的最大公约数}}$



【例 1】(2009 年江西) 一个四边形广场, 它的四边长分别是 60 米、72 米、96 米、84 米, 现在四边上植树, 四角需种树, 而且每两棵树的间隔相等, 那么, 至少要种多少棵树? ()

- A. 22 B. 25 C. 26 D. 30

【解析】 本题考查公约数问题。环形植树公式: 棵数 = 周长 ÷ 间隔, 题干要求所种棵数最少即间隔最大, 60、72、96、84 的最大公约数为 12, 则至少要种 $(60+72+96+84) \div 12 = 26$ (棵)。因此, 答案选择 C 选项。

【例 2】 有两种药分别重 $\frac{25}{6}$ 千克、 $\frac{15}{8}$ 千克, 将这两种药分别平均分成若干份, 并且两种药每份的重量也是相等的, 那么请问至少分成了多少份? ()

- A. 9 B. 19 C. 29 D. 39

【解析】 本题考查最大公约数问题。假设每份药的重量为 x 千克, 那么 x 既是 $\frac{25}{6}$ 的约数, 也是 $\frac{15}{8}$ 的约数, 即 x 是 $\frac{25}{6}$ 和 $\frac{15}{8}$ 的公约数。想要分成的份数尽量少, 那么 x 应该尽量大, 故 x 是 $\frac{25}{6}$ 和 $\frac{15}{8}$ 的最大公约数。根据求上述分数最大公约数的方法, 分子的最大公约数是 5, 分母的最小公倍数是 24, 因此 $\frac{25}{6}$ 和 $\frac{15}{8}$ 的最大公约数是 $\frac{5}{24}$, 因此至少分成了 $\frac{25}{6} \div \frac{5}{24} + \frac{15}{8} \div \frac{5}{24} = 29$ (份)。因此, 答案选择 C 选项。

【例 3】 (2011 年联考) 有甲、乙、丙三辆公交车于上午 8:00 同时从公交总站出发, 三辆车再次回到公交总站所用的时间分别为 40 分钟、25 分钟和 50 分钟。假设这三辆公交车中途不休息, 请问它们下次同时到达公交总站将会是几点? ()



A. 11点20分 B. 11点整 C. 11点40分 D. 12点整

【解析】 本题考查倍数问题。40分钟、25分钟、50分钟的最小公倍数为200分钟。8:00同时发车,则下次同时到达公交总站为200分钟后,合计3小时20分钟,即11点20分。因此,答案选择A选项。

【例4】 (2012年深圳)老李给自家院子搞绿化,从院门口左边开始,贴着院墙每隔 $2\frac{2}{3}$ 米种紫叶矮樱,每隔 $4\frac{4}{9}$ 米种金叶榆,每隔 $4\frac{4}{5}$ 米种龙爪槐,每隔8米种银杏,种完发现只有起点和终点(即院门口两边)四种植物重合种在一处,则院墙周长()米。

A. 90 B. 120 C. 150 D. 180

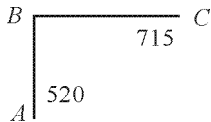
【解析】 本题考查倍数问题。由题意,院墙的周长应该是 $2\frac{2}{3}$ 、 $4\frac{4}{9}$ 、 $4\frac{4}{5}$ 、8的**最小公倍数**。先将带分数都化为假分数,分别为 $\frac{8}{3}$ 、 $\frac{40}{9}$ 、 $\frac{24}{5}$ 、 $\frac{8}{1}$,**分子的最小公倍数为120,分母的最大公约数为1**,即这几个数的最小公倍数是120。因此,答案选择B选项。

通关自测

【练习1】 把144张卡片平均分成若干盒,每盒在10张到40张之间,则共有()种不同的分法。

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

【练习2】 如下图,街道ABC在B处拐弯,在街道一侧等距离安装路灯,要求A、B、C三处各装一盏路灯,这条街最少装多少盏路灯?()



- A. 18 B. 19 C. 20 D. 21

【练习 3】甲每 5 天进城一次,乙每 9 天进城一次,丙每 12 天进城一次,某天三人在城里相遇,那么下次相遇至少要()。

- A. 60 天 B. 180 天 C. 540 天 D. 1620 天

【练习 4】甲、乙、丙三个滑冰运动员在一起练习滑冰,已知甲滑一圈需要 1 分钟,乙、丙分别需要一又四分之一分钟和一又六分之一分钟,若甲、乙、丙同时从起点出发,则多长时间后三人再次在起点相遇?()

- A. 8 B. 10 C. 12 D. 35

自测答案

1. B 【解析】本题考查约数问题。 $144=2\times 2\times 2\times 2\times 3\times 3$,约数在 10 到 40 之间的有 12、16、18、24、36,共 5 个。因此,答案选择 B 选项。

2. C 【解析】题干中要求路灯最少,即灯与灯之间的距离要最大,所以本题考核最大公约数。 $715=5\times 11\times 13$, $520=5\times 8\times 13$,二者最大公约数为 $5\times 13=65$ 。故应每隔 65 米装一盏,灯数=总长度÷间隔长度+1,路灯总数为 $11\div 65+1=20$ (盏)。因此,答案选择 C 选项。

3. B 【解析】题干要求解的是最小的天数,即考查最小公倍数。 $5、9、12$ 的最小公倍数为 180,因此,三人再次相遇至少需要 180 天。因此,答案选择 B 选项。

4. D 【解析】本题考查最小公倍数。甲、乙、丙滑行一圈需要的时间分别为 1 分钟、 $\frac{5}{4}$ 分钟、 $\frac{7}{6}$ 分钟,分子的最小公倍数为 35,分母的最大公约数为 1,所以三者的最小公倍数为 35。因此,答案选择 D 选项。

第十计 ★★★余数问题

 黄金法则

被除数 = 除数 \times 商 + 余数 ($0 \leq \text{余数} < \text{除数}$)。

 破解密钥

余数问题一般采用代入法解决。余数口诀：余同取余，和同加和，差同减差，公倍数做周期。

余数可加性：

a 与 b 的和除以 c 的余数，等于 a 、 b 分别除以 c 的余数之和。

余数可乘性：

a 与 b 的乘积除以 c 的余数，等于 a 、 b 分别除以 c 的余数之积。

注：当余数之积（和或差）大于除数时，所求余数等于余数之积（和或差）再除以除数的余数。

余数可减性：

a 与 b 的差除以 c 的余数，等于 a 、 b 分别除以 c 的余数之差。

 魔力四射

【例 1】(2013 年江苏) 一个三位数除以 53，商是 a ，余数是 b (a, b 都是正整数)，则 $a+b$ 的最大值是？ ()

A. 69

B. 80

C. 65

D. 75

【解析】本题考查余数问题。由题意可知，这个三位数等于 $53a+b$ ，因此有 $99 < 53a+b < 999$ ， $0 < b < 53$ ，因此 b 的最大值为 52，将 $b=52$ 代入得 $47 < 53a < 948$ ，可求得 a 最大为 17，所以 $a+b$ 最大值为 $52+17=69$ 。因此，答案选择 A 选项。

【例 2】(2011 年北京)有一个整数,用它分别去除 157、324 和 234,得到的三个余数之和是 100,求这个整数。()

- A. 44 B. 43 C. 42 D. 41

【解析】本题考查余数问题。根据余数的可加性, $157+324+234-100=615$, 则 615 可被该整数整除。615 为奇数,不可能被偶数整除,排除 A、C 两项。将 B 选项代入, $615 \div 43 \neq$ 整数,排除。 $615 \div 41=15$, 满足题意。因此,答案选择 D 选项。

【例 3】(2011 年天津事业)一个三位数除以 9 余 7,除以 5 余 2,除以 4 余 3,这样的三位数共有()个。

- A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

【解析】本题考查余数问题。

解法一:这个数除以 5 余 2,除以 4 余 3,“和同加和”,则这个数可表示为 $20n+7$,所以这个数除以 20 余 7;由于这个数除以 9 余 7,除以 20 余 7,“余同取余”,则这个数可以表示为 $180n+7$ 。所以这个数可能的取值是 187、367、547、727、907,共 5 个。因此,答案选择 D 选项。

解法二:对于数学基础比较好的考生可以这样考虑:9、5、4 的最小公倍数是 180,那么 180 是满足条件的数的最小正周期,即每 180 个数当中有一个数可以满足条件。而三位数从 100 到 999 一共 900 个数, $900 \div 180=5$ 。因此,答案选择 D 选项。

【例 4】 2007^3 除以 7 的余数是多少?()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

【解析】本题考查余数问题。根据余数的可乘性,2007 除以 7 的余数为 5, 2007^3 除以 7 的余数可转换为“ 5^3 除以 7 的余数”,即 $125 \div 7=17 \cdots 6$ 。因此,答案选择 D 选项。

通关自测

【练习 1】一个小于 200 的数,它除以 11 余 8,除以 13 余 10,那么这个数是多少?()

- A. 118 B. 140 C. 153 D. 162

【练习 2】 11338×25593 的值为()。

- A. 290133434 B. 290173434 C. 290163434 D. 290153434



【练习 3】三位数 A 除以 51, 商是 a (a 是正整数), 余数是商的一半, 则 A 的最大值是()。

- A. 927 B. 928 C. 929 D. 990

自测答案

1. B 【解析】本题考查余数问题。 $11-8=3, 13-10=3$, 符合“差同”, 则通项式为 $11 \times 13n - 3$, 当 $n=1$ 时, 结果为 140。因此, 答案选择 B 选项。

2. B 【解析】本题考查计算问题, 可利用余数的可乘性。 11338 除以 3 余 1, 25593 能被 3 整除, 则结果一定是 3 的倍数, 选项中只有 B 选项能整除以 3。因此, 答案选择 B 选项。

3. A 【解析】本题考查余数问题。根据题意可得 $51a + 0.5a \leq 999$, 解得 $a \leq 19.4$, a 一定是个偶数, 所以 a 的最大值为 18, 那么 A 的最大值为 $51 \times 18 + 9 = 927$ 。因此, 答案选择 A 选项。

第十一计 ★★★周期规律法

黄金法则

周期规律法的核心在于根据题型迅速找出规律,常见的有余数、尾数成规律,排列成规律,题干的描述呈现等差、等比或周期数列变化等,解题方法有枚举法、归纳法等。

破解密钥

题干中出现了省略号,计算式长且复杂,运算量较大,或题干中有特定变化规律的描述时,都可以考虑用周期规律法解题。

若一串实物以 T 为周期,且 $A \div T = N \cdots a$,那么第 A 项等同于第 a 项。常考的题型有以下四种:

数字计算类:

分数类计算题可采用裂项法进行消去;较高幂次的尾数可直接根据乘方尾数公式进行求解;其他类的计算题可采用分组找规律的方式归纳出变化规律进行求解。

几何计数类:

几何计数类,可从基数较小、较简单入手,采用枚举归纳法,找出其中的规律,进行求解。

排列组合类:

新颖的排列组合题目往往是考查规律归纳的能力,通过枚举逐步分析,进而找到规律得到答案。

日期计数类:

日期计算其实考查的就是周期计算,年基本以 365 天为周期变化,月基本以 30 天为周期变化,星期以 7 天为周期变化,因此日期计算类题目其实就是找规律,进而得到答案。

魔力四射

【例 1】(2012 年江苏)50 个数,1、2、3、2、3、4、3、4、5、4、5、6、5、6、7、6、7、8……之和是()。

- A. 568 B. 497 C. 523 D. 491

【解析】本题考查数字计算。观察发现数字明显有以三个数为周期的特征,将 50 个数三三分组,即(1、2、3)、(2、3、4)、(3、4、5)……(16、17、18)、(17、18),最后一组只有 2 个数,可加上第 51 个数,将最后一组变为(17、18、19),可发现 17 组数据的和分别为 6、9、12……54,构成公差为 3 的等差数列,则和 $= \frac{(6+54) \times 17}{2} = 510$,则原来 50 个数的和 $= 510 - 19 = 491$ 。因此,答案选择 D 选项。

【例 2】(2012 年联考)用直线切割一个有限平面,后一条直线与此前每条直线都要产生新的交点,第 1 条直线将平面分成 2 块,第 2 条直线将平面分成 4 块。第 3 条直线将平面分成 7 块,按此规律将平面分为 22 块需()。

- A. 7 条直线 B. 8 条直线 C. 9 条直线 D. 6 条直线

【解析】本题考查几何计数。1 条直线将平面分为 2 部分,2 条直线将平面分成 $2+2=4$ 部分,3 条直线将平面分成 $2+2+3=7$ 部分,4 条直线将平面分成 $2+2+3+4=11$ 部分,5 条直线将平面分成 $2+2+3+4+5=16$ 部分,6 条直线将平面分成 $2+2+3+4+5+6=22$ 部分,可以发现 n 条直线将平面分为 $2+2+3+\dots+n=1+1+2+3+\dots+n=1+\frac{n(n+1)}{2}$ 部分。因此,答案选择 D 选项。

【例 3】(2012 年北京)小张每连续工作 5 天后休息 3 天,小周每连续工作 7 天后休息 5 天。假如 3 月 1 日两人都休息,3 月 2 日两人都上班,问三月份有多少天两人都得上班?()

- A. 12 B. 14 C. 16 D. 18

【解析】本题考查规律类问题。根据题干描述,列表如下:

3 月份上班时间				
小张	2 日到 6 日	10 日到 14 日	18 日到 22 日	26 日到 30 日
小周	2 日到 8 日	14 日到 20 日	26 日到 31 日	
重合时间	2 日到 6 日(5 天)、14 日到 17 日(4 天)、18 日到 20 日(3 天)、26 日到 30 日(5 天)			

由表格可知,共同上班的时间 $=5+1+3+5=14$ (天)。因此,答案选择 B 选项。

【例 4】(2012 年北京)在一排 10 个花盆中种植 3 种不同的花,要求每 3 个相邻的花盆中花的种类各不相同,问有多少种不同的种植方法? ()

- A. 6 B. 12 C. 18 D. 24

【解析】本题考查规律类排列组合问题。假定先安排最边上的第一个花盆,有 3 种方式,由于每 3 个相邻的花盆中花的种类各不相同,则与其相邻的第二个花盆有 2 种方式,第三个花盆只有一种方式。第二个花盆和第三个花盆确定后,第四个花盆只有一种方式,依次类推,即第一和第二个花盆确定后,从第三到第十个花盆只有一种方式,因此种植方法有 $3 \times 2 = 6$ (种)。因此,答案选择 A 选项。

通关自测

【练习 1】在数列 2,3,5,8,12,17,23,⋯中,第 2012 个数被 5 除所得余数为()。

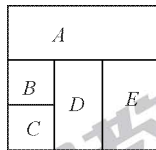
- A. 1 B. 3 C. 2 D. 4

【练习 2】上一段 8 级楼梯,规定每一步只能上一级或两级或三级楼梯,要登上第 8 级楼梯,不同的走法共有()种。

- A. 24 B. 44 C. 56 D. 81

【练习 3】用四种颜色对右图中的 A、B、C、D、E 五个区域染色,要求相邻的区域染不同的颜色,共有()种不同的方法。

- A. 80 B. 96
C. 108 D. 120



【练习4】甲、乙、丙三人从星期一开始工作,甲每工作3天就休息一天,乙每工作5天就休息2天,丙每工作7天就休息3天,那么三人第一次同时休息是在星期几? ()

- A. 星期三 B. 星期四 C. 星期六 D. 星期日

自测答案

1. B 【解析】本题考查规律类问题。原数列两两作差得到1,2,3,4,5,6...,而连续自然数被5除所得的余数以5为周期,因此原数列除5所得余数也是周期数列,循环节为2,3,0,3,2,则第2012个数被5除的余数应为3。因此,答案选择B选项。

2. D 【解析】本题考查规律类问题。上1级台阶只有1种走法。上2级台阶只有1+1和2两种走法。上3级台阶有1+1+1,1+2,2+1,3共4种走法。上4级台阶有1+1+1+1,1+1+2,1+2+1,2+1+1,2+2,1+3,3+1共7种。上5级台阶共2+4+7=13(种)走法,上6级共4+7+13=24(种)走法,上7级共7+13+24=44(种)走法,上8级台阶共13+24+44=81(种)走法。即上第n级台阶的走法相当于跨上第n-1级台阶和第n-2级台阶及第n-3级台阶走法数的总和。因此,答案选择D选项。

3. B 【解析】本题考查排列组合。相邻的区域染色不同,D相邻的区域较多,按照D、E、A、B、C的顺序染色,共有 $4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$ (种)方法。因此,答案选择B选项。

4. C 【解析】本题考查规律类问题。根据题干描述,列表如下:

	休息时间		
	第一周	第二周	第三周
甲	周四	周一、周五	周二、周六
乙	周六、周日	周六、周日	周六、周日
丙		周一、周二、周三	周四、周五、周六
重合时间			第三周周六

因此,答案选择C选项。

第十二计 ★★★★★ 不定方程问题

黄金法则

不定方程常用的解法为奇偶特性、整除特性、尾数特性、赋值代入，以及整体消去等方法。

破解密钥

不定方程指的是未知数的个数大于方程的个数，且未知数受到某些限制（如要求是整数、质数等）的方程或方程组。

二元不定方程：

$$ax+by=c$$

这样的方程的解法一般是利用奇偶特性或者利用整除特性进行求解，同时往往还结合赋值代入。

如： $12x+5y=99$ ($x+y>10$ ，且 x, y 为整数) 分析时就可以从奇偶特性入手， $12x$ 为偶数， 99 为奇数，所以 $5y$ 一定是奇数，得出 y 一定是奇数，从而得出 $5y$ 的尾数为 5， $12x$ 的尾数必须是 4。所以可以假设 $x=2$ ，得到 $y=15$ ，完全符合题意。

多元不定方程组：

不定方程组经常采用的方法有：整体消去法，特值代入法。如：

$$\begin{cases} 9x+5y+z=72 \cdots \cdots (1) \\ 13x+7y+z=86 \cdots \cdots (2) \end{cases}, \text{求 } x+y+z.$$

整体消去法： $3 \times (1) - 2 \times (2) = x + y + z = 3 \times 72 - 2 \times 86 = 44$ 。

特值代入法：由于不定方程的解是无穷多个的，求解 $x+y+z$ 的具体值，这说明其值为定值，故而可以采用特值法，一般令方程中系数最大的未知数为 0 再进行计算。

令 $x=0$ ，得到 $y=7, z=37$ ，所以 $x+y+z=44$ 。



魔力四射

【例 1】(2012 年联考)甲工人每小时可加工 A 零件 3 个或 B 零件 6 个,乙工人每小时可加工 A 零件 2 个或 B 零件 7 个。甲、乙两工人一天 8 小时共加工零件 59 个,甲、乙加工 A 零件分别用时为 x 小时、 y 小时,且 x, y 皆为整数,两名工人一天加工的零件总数相差()。

- A. 6 个 B. 7 个 C. 4 个 D. 5 个

【解析】本题考查不定方程。由题意可知 $3x+6\times(8-x)+2y+7\times(8-y)=59$,进一步化简得到: $3x+5y=45$,分析整除关系 $3x$ 和 45 都是 3 的倍数,所以 $5y$ 是 3 的倍数,也就是说 y 是 3 的倍数。假设 $y=3$,那么 $x=10$ 不满足要求; $y=6$ 时,可得出 $x=5$,满足题意。进而可以得到甲的零件总数为 33,乙的零件总数为 26,得到甲乙零件数相差 7。因此,答案选择 B 选项。

【例 2】(2011 年深圳)小刚买了 3 支钢笔、1 个笔记本、2 瓶墨水,花去 35 元钱,小强在同一家店买同样的 5 支钢笔、1 个笔记本、3 瓶墨水共花去 52 元钱,则买 1 支钢笔、1 个笔记本、1 瓶墨水共需()元。

- A. 9 B. 12 C. 15 D. 18

【解析】本题考查不定方程组。设钢笔、笔记本、墨水的单价分别为 x, y, z 元,由题意可得:

$$\begin{cases} 3x+y+2z=35 \cdots \cdots (1) \\ 5x+y+3z=52 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

解法一: $x+y+z=2\times(1)-(2)=2\times 35-52=18$ (元)。

解法二:令 $x=0$,解得 $y=1, z=17$,进而可以得到 $x+y+z=18$ 。因此,答案选择 D 选项。

【例 3】(2012 年国考)三位专家为 10 幅作品投票,每位专家分别都投出了 5 票,并且每幅作品都有专家投票。如果三位专家都投票的作品列为 A 等,两位专家投票的列为 B 等,仅有一位专家投票的作品列为 C 等,则下列说法正确的是()。

- A. A 等和 B 等共 6 幅 B. B 等和 C 等共 7 幅
C. A 等最多有 5 幅 D. A 等比 C 等少 5 幅

【解析】 本题考查不定方程组。设 A 等为 x 件, B 等为 y 件, C 等为 z 件, 则可得

$$\begin{cases} x+y+z=10 \cdots \cdots (1) \\ 3x+2y+z=15 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

(2)-(1) 可得, $2x+y=5$, A 项无法推出。(1) $\times 3$ -(2) 可得, $y+2z=15$, B 项无法推出。(1) $\times 2$ -(2) 可得, $z-x=5$, 满足题意。因此, 本题答案选择 D 项。

【例 4】 (2013 年江苏) 甲、乙两种笔的单价分别为 7 元、3 元, 某小学用 60 元钱买这两种笔作为学科学竞赛一、二等奖奖品。钱恰好用完, 则这两种笔最多可买的支数是()。

- A. 12 B. 13 C. 16 D. 18

【解析】 本题考查不定方程。设购买甲、乙的数量分别为 x, y , 则: $7x+3y=60$, 总费用一定的前提下, 要使得购买数量尽可能多, 则购买单价高的应该尽量少, 即 x 应尽量小, 60 与 $3y$ 均是 3 的倍数, 则 $7x$ 必须是 3 的倍数。 x 的最小值是 3, 此时 $y=13$, 即甲乙笔的和最大值为 16。因此, 答案选择 C 选项。

通关自测

【练习 1】 工人甲一分钟可生产螺丝 3 个或螺丝帽 9 个, 工人乙一分钟可生产螺丝 2 个或螺丝帽 7 个, 现在两人各花 20 分钟, 共生产螺丝和螺丝帽 134 个, 问生产的螺丝比螺丝帽多几个? ()

- A. 34 B. 32 C. 30 D. 28

【练习 2】 某公司的 6 名员工一起去用餐, 他们各自购买了三种不同食品中的一种, 且每人只购买了一份。已知盖饭 15 元一份, 水饺 7 元一份, 面条 9 元一份, 他们一共花费了 60 元。问他们中最多有几人买了水饺? ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【练习 3】 某单位有宿舍 11 间, 可以住 67 人, 已知每间小宿舍住 5 人, 中宿舍住 7 人, 大宿舍住 8 人, 则小宿舍间数是()。

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

【练习 4】 去商店买东西, 如果买 7 件 A 商品, 3 件 B 商品, 1 件 C 商品, 一共需要 50 元, 如果是买 10 件 A 商品, 4 件 B 商品, 1 件 C 商品, 一共需要 69 元, 若 A、B、C 三种商品各买 2 件, 需要多少



钱? ()

A. 28 元

B. 26 元

C. 24 元

D. 20 元

自测答案

1. A 【解析】本题可考查不定方程问题,设甲、乙分别生产螺丝 x 、 y 分钟,则 $3x+9(20-x)+2y+7(20-y)=134$,化简为 $6x+5y=186$ 。因为 $6x$ 和 186 是 6 的倍数,则 $5y$ 是 6 的倍数,即 y 是 6 的倍数。 $5y$ 的尾数是 0 ,则可得 $6x$ 的尾数是 6 ,则 x 的尾数是 1 或者 6 。因为 $5y \leq 100$,则 $6x \geq 80$, $x \geq 14$ 。故可得出 $x=16$, $y=18$ 。甲、乙共生产螺丝 $3 \times 16 + 2 \times 18 = 84$ (个),生产螺丝帽 $9 \times 4 + 7 \times 2 = 50$ (个),螺丝比螺丝帽多 34 个。因此,本题选择 A 选项。

2. C 【解析】本题属于不定方程组问题。设购买盖饭、水饺、面条的人分别有 x 、 y 、 z 个。由题意有 $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 15x+7y+9z=60 \end{cases}$ 。因为 $15x$ 、 $9z$ 、 60 都是 3 的倍数,则 $7y$ 一定是 3 的倍数,即 y 一定是 3 的倍数,只有 C 项符合。因此,本题选择 C 项。

3. A 【解析】假设小、中、大宿舍数目依次为 x 、 y 、 z ,则可得 $\begin{cases} x+y+z=11 \cdots \cdots (1) \\ 5x+7y+8z=67 \cdots \cdots (2) \end{cases}$,

$(1) \times 8 - (2)$ 可得, $3x+y=21$ 。因为 y 大于 0 ,则可得 $3x < 21$,选项中只有 A 项满足。因此,本题答案选择 A 选项。

4. C 【解析】本题考查不定方程组。设 A 商品的价格为 x 元, B 商品的价格为 y 元, C 商品的价格为 z 元。由题意有 $\begin{cases} 7x+3y+z=50 \cdots \cdots (1) \\ 10x+4y+z=69 \cdots \cdots (2) \end{cases}$, $(1) \times 3 - (2) \times 2$ 可得, $x+y+z=12$,进而得知 $2(x+y+z)=24$ 。因此,答案选择 C 选项。



百鸡问题

《张丘建算经》提出了一个不定问题，即世界数学史上著名的百鸡问题：“今有鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱三；鸡雏三，值钱一。凡百钱，买鸡百只。问鸡翁、母、雏各几何？”



第十三计 ★★★★★ 溶液问题

 黄金法则

溶液 = 溶质 + 溶剂, 浓度 = 溶质 ÷ 溶液, 溶质 = 溶液 × 浓度。

 破解密码

溶液问题是一类典型的比例型计算问题, 在解题中应重点把握“溶液”、“溶质”、“溶剂”、“浓度”之间的关系, 采用赋值法、十字交叉法、方程法解题。

溶液混合问题:

两溶液混合, 质量分别为 M_1 、 M_2 , 浓度分别为 C_1 、 C_2 , 混合后溶液浓度为 C , 则有公式:

$$M_1 C_1 + M_2 C_2 = (M_1 + M_2) C$$

抽象比例型问题:

抽象比例型问题是指不涉及具体溶液总量, 只涉及溶质与溶剂的相对比例的一种题型, 解法是将其中的“不变量”或者“相等量”设为一特值, 从而简化计算。

 魔力四射

【例 1】将 10 克盐和 200 克浓度为 5% 的盐水一起加入一杯水中, 可得浓度为 2.5% 的盐水, 则原来杯中水的克数是()。

反复稀释型:

1. 溶液中倒出比例为 a 的溶液, 再加入相同的溶剂, 则浓度变为原来的 $(1-a)$;
2. 溶液中加入比例为 a 的溶剂, 再倒出相同的溶液, 则浓度变为原来的 $\frac{1}{1+a}$ 。

注: 核心在于分析清楚在反复变化过程中, 若浓度一直在减少, 即溶质一直在减少, 则直接使用公式。在反复变化过程中, 若浓度在增加, 则此时需要将溶质视为溶剂, 溶剂视为溶质, 也就是要摒弃传统中“水”一定为溶剂的观点。

- A. 570 B. 580 C. 590 D. 600

【解析】 本题考查基本的溶液混合问题。

解法一：设原来杯中有 x 克水，则可得 $10+200 \times 5\% = (10+x+200) \times 2.5\%$ ，解得 $x=590$ 。因此，本题答案选择 C 选项。

解法二：本题也可以通过代入选项进行解题，只有 C 选项满足 $(10+x+200) \times 2.5\%$ 是整数，所以答案肯定是 C 选项。

【例 2】 (2010 年江苏) 一瓶浓度为 80% 的酒精溶液倒出 $\frac{1}{3}$ 后再加满水，再倒出 $\frac{1}{4}$ 后仍用水加满，再倒出 $\frac{1}{5}$ 后还用水加满，这时瓶中溶液的酒精浓度是()。

- A. 50% B. 30% C. 35% D. 32%

【解析】 本题考查溶液混合稀释问题。分析过程可知，溶质一直在减少，而且每次剩余的溶质的量是按比例变化的，由混合稀释型问题公式可得，最后溶液的浓度为 $(1-\frac{1}{3}) \times (1-\frac{1}{4}) \times (1-\frac{1}{5}) \times 80\% = 32\%$ 。因此，答案选择 D 选项。

【例 3】 (2008 年广东) 一杯糖水，第一次加入一定量的水后，糖水的含糖百分比变为 15%；第二次又加入同样多的水，糖水的含糖百分比变为 12%；第三次再加入同样多的水，糖水的含糖百分比将变为多少？()

- A. 8% B. 9% C. 10% D. 11%

【解析】 本题考查溶液抽象比例问题。设第一次加入水后，糖水的量为 1200，则糖的量为 180，第二次加水后，糖量 180 不变，则糖水的量为 $180 \div 12\% = 1500$ ，即加水的量为 $1500 - 1200 = 300$ ，则第三次加水后的浓度为 $180 \div (1500 + 300) = 10\%$ 。因此，本题答案选择 C 选项。

【例 4】 (2008 年云南) 有一瓶水，将它倒出 $\frac{1}{3}$ ，然后倒入同样多的酒精，再将此溶液倒出 $\frac{1}{4}$ 后又倒进同样多的酒精，第三次倒出此溶液的 $\frac{1}{5}$ 后又倒进同样多的酒精，问此时的酒精浓度是多少？()

- A. 70% B. 65% C. 60% D. 55%



【解析】 本题考查溶液稀释问题。分析过程可知,水一直在减少,且每次剩余的水的量是按比例变化的,将水看作溶质,酒精看作溶剂,则为稀释问题,根据混合基本公式,最后水所占的百分比为 $100\% \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) \times (1 - \frac{1}{5}) = 40\%$, 则酒精浓度必然为 60% 。因此,答案选择 C 选项。

通关自测

【练习 1】 有浓度为 4% 的盐水若干克,蒸发了一些水分后浓度变成 10% ,再加入 300 克 4% 的盐水后,变为浓度 6.4% 的盐水,则最初的盐水是()。

- A. 200 克 B. 300 克 C. 400 克 D. 500 克

【练习 2】 一满杯纯牛奶,喝去 20% 后用水加满,再喝去 60% 。此时杯中的纯牛奶占杯子容积的百分数为()。

- A. 52% B. 48% C. 42% D. 32%

【练习 3】 木材原来的水分含量为 28% ,由于挥发,现在的水分含量为 10% ,则现在这些木材的重量是原来的()。

- A. 50% B. 60% C. 70% D. 80%

【练习 4】 三个容积相同的瓶子里装满了酒精溶液,酒精与水的比分别是 $2:1, 3:1, 4:1$ 。当把三瓶酒精溶液混合后,酒精与水的比是多少?()

- A. $133:47$ B. $131:49$ C. $33:12$ D. $3:1$

自测答案

1. D **【解析】** 本题考查浓度问题。设最初的盐水是 x 克,则最初含盐 $4\%x$ 克,蒸发后还剩盐水 $4\%x \div 10\% = 40\%x$ (克),于是可列方程: $4\%x + 300 \times 4\% = (40\%x + 300) \times 6.4\%$,解得 $x = 500$ 。

2. D **【解析】** 本题考查溶液稀释问题。由混合稀释型公式可得,最后纯牛奶的浓度为 $100\% \times (1 - 20\%) \times (1 - 60\%) = 32\%$ 。因此,本题选择 D 选项。

3. D 【解析】因为原来的水分含量为 28%，所以可以设原先木材总重量为 100，那么非水成分的重量为 72。现在的含水量为 10%，则总的木材重量为 $72 \div (1 - 10\%) = 80$ ，故木材的重量为原来的 80%。因此，本题答案选择 D 项。

4. A 【解析】本题考查抽象溶液问题。三个瓶子的体积是相同的，所以设瓶子的体积为 60，则酒精与水分别为 40 与 20、45 与 15、48 与 12，因此混合后酒精与水的比值为 $(40 + 45 + 48) : (20 + 15 + 12) = 133 : 47$ 。因此，本题答案选择 A 项。

第十四计 ★★★十字交叉法

黄金法则

十字交叉法最终得到的是一个比例,关键在于确定这个比例是什么量的比例!

破解密钥

十字交叉法主要用于解决加权平均型问题,即由两个不同的“数值”混合在一起形成新的“平均值”的问题。当题干中出现了“溶液混合”“平均数混合”“增长率混合”“利润率混合”时,首先要考虑的是十字交叉法的解题方法。

$$Aa + Bb = (A+B)r \Rightarrow \begin{array}{ccc} A : a & & r - b \\ & \diagdown & / \\ & r & \\ & / & \diagdown \\ B : b & & a - r \end{array} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{r-b}{a-b}$$

溶液混合问题:

两种不同浓度的溶液混合,得到的混合浓度大小居中,十字交叉所得到的比例为混合前溶液的质量之比或体积之比。

平均数混合:

两组数据混合,得到的混合平均数大小居中,十字交叉所得到的比例为两组数据的数量之比。

增长率混合:

总量的两个分量增长率混合,得到的混合增长率大小居中,十字交叉所得到的比例为两个分量的基期量之比。

利润率混合:

两种不同利润率的商品混合,得到的混合利润率大小居中,十字交叉得到的比例为两种利润率混合前所对应商品的销量之比。

折扣混合:

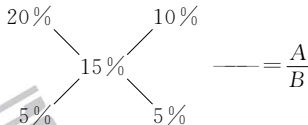
两种不同折扣的商品混合,得到的混合折扣大小居中,十字交叉得到的比例为混合前所对应商品的总定价之比。

魔力四射

【例 1】(2010 年贵州)要将浓度分别为 20% 和 5% 的 A、B 两种食盐水混合配成浓度为 15% 的食盐水 900 克。问 5% 的食盐水需要多少克? ()

- A. 250 B. 285 C. 300 D. 325

【解析】本题考查溶液混合。浓度为 20% 的溶液与浓度为 5% 的溶液混合后得到的混合溶液的浓度为 15%，混合浓度大小居中。十字交叉法表示如下：

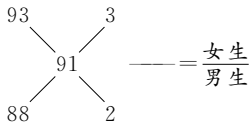


即 $\frac{A}{B} = \frac{10\%}{5\%} = \frac{2}{1}$, 故 B 溶液的质量为 $\frac{1}{3} \times 900 = 300$ 。因此,答案选择 C 选项。

【例 2】(2008 年陕西)某班一次数学测试,全班平均 91 分,其中男生平均 88 分,女生平均 93 分,则女生人数是男生人数的多少倍? ()

- A. 0.5 B. 1 C. 1.5 D. 2

【解析】本题考查平均数混合。男生的平均分为 88 分,女生的平均分为 93 分,男女混合后总的平均分是 91 分,大小介于男生和女生之间,十字交叉法表示如下:



解得女生人数是男生的 1.5 倍。因此答案选择 C 选项。

【例 3】(2011 年石家庄事业) 某公司 2011 年前三季度营业收入 7650 万元, 比上年同期增长 2%, 其中主营业务收入比上年同期减少 2%, 而其他业务收入比上年同期增加 10%, 那么该公司今年前三季度主营业务收入为()。

- A. 3920 万元 B. 4410 万元 C. 4900 万元 D. 5490 万元

【解析】本题考查增长率的混合。十字交叉法表示如下:

$$\begin{array}{ccc} -2\% & & 8\% \\ & \searrow & / \\ & 2\% & \\ & / & \searrow \\ 10\% & & 4\% \end{array} = \frac{2}{1}$$

可得 2010 年前三季度主营业务收入与其他业务收入之比为 2:1, 主营业务收入占总收入的比重为 $\frac{2}{3}$ 。2010 年前三季度营业收入为 $7650 \div (1+2\%) = 7500$ (万元), 主营业务收入为 $7500 \times \frac{2}{3} = 5000$ (万元), 则 2011 年前三季度主营业务收入为 $5000 \times (1-2\%) = 4900$ (万元)。因此, 答案选择 C 选项。

【例 4】(2010 年江苏) 校长去机票代理处为单位团购机票 10 张, 商务舱定价 1200 元/张, 经济舱定价 700 元/张。由于买的数量较多, 代理商就给予优惠, 商务舱按定价的 9 折折钱, 经济舱按定价 6 折折钱, 如果他付的钱比按定价少 31%, 那么校长一共买了经济舱几张? ()

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

【解析】本题考查折扣混合。商务舱的折扣为 9 折, 经济舱的折扣为 6 折, 混合后的折扣为 6.9 折 ($1-31\%=69\%$), 混合折扣大小介于商务舱和经济舱之间, 十字交叉法表示如下:

$$\begin{array}{ccc} 9 & & 0.9 \\ & \searrow & / \\ & 6.9 & \\ & / & \searrow \\ 6 & & 2.1 \end{array} = \frac{\text{商务舱原价}}{\text{经济舱原价}}$$

可以得到商务舱的原价: 经济舱的原价 = 3:7, 假设计划购买商务舱为 x 张, 经济舱为 y 张, 则

可以得到： $1200x : 700y = 3 : 7$ ，进而可以得到 $x : y = 2 : 8$ ，也就是说计划购买商务舱为 2 张，经济舱为 8 张。因此，答案选择 C 选项。

通关自测

【练习 1】甲种酒精纯酒精含量为 72%，乙种酒精纯酒精含量为 58%，混合后纯酒精含量为 62%。如果每种酒精取的数量比原来都多 15 升，混合后纯酒精含量为 63.25%。问第一次混合时，甲、乙两种酒精各取多少升？（ ）

- A. 12 30 B. 24 60 C. 30 12 D. 16 40

【练习 2】某人持有两只股票，某日收盘时 A 股损失 2%，B 股上涨 10%，其两只股票总价值为 22950 元，总体上涨 2%，则收盘时 A 股价值为（ ）元。

- A. 15000 B. 14700 C. 15450 D. 7500

【练习 3】一批手机，商店按期望获得 100% 的利润来定价，结果只销售掉 70%。为了尽早销售掉剩下的手机，商店决定打折出售，为了获得的全部利润是原来期望利润的 91%，则商店所打的折是（ ）。

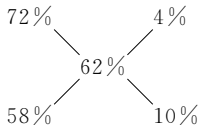
- A. 六折 B. 七折 C. 八五折 D. 九折

【练习 4】某单位共有 A、B、C 三个部门，三部门人员平均年龄分别为 38 岁、24 岁、42 岁。A 和 B 两部门人员平均年龄为 30 岁，B 和 C 两部门人员平均年龄为 34 岁。该单位全体人员平均年龄为几岁？（ ）

- A. 34 B. 36 C. 35 D. 37

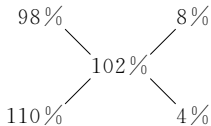
自测答案

1. A **【解析】**本题可用十字交叉法，得到的比值为混合前甲、乙两溶液的体积之比。第一次混合的情况，使用十字交叉法如下：



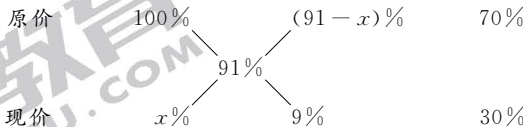
可得出第一次混合时取出的甲、乙两种溶液的体积之比为 $4\% : 10\% = 2 : 5$ 。同理,由十字交叉法可得第二次取出的甲、乙溶液体积之比为 $3 : 5$ 。设第一次取出的甲、乙两溶液的体积为 $2x$ 、 $5x$,则可得 $\frac{2x+15}{5x+15} = \frac{3}{5}$,解得 $x=6$,故第一次取出的溶液分别为 12 升、30 升。因此,本题答案选择 A 项。

2. B 【解析】本题考查增长率问题。十字交叉法表示如下:



可以得到 A、B 两股的总价值之比为 $A : B = 8\% : 4\% = 2 : 1$,因此 A 股的原价值为 $22950 \div 102\% \times \frac{2}{3} = 15000$ (元),收盘时损失 2%,则收盘时的价格为 $15000 \times (1 - 2\%) = 14700$ (元)。因此,答案选择 B 选项。

3. C 【解析】新利润为 $x\%$,用十字交叉法:



则可得 $\frac{91-x}{9} = \frac{70}{30}$,解得 $x=70$ 。所以商店的折扣为 $(1+70\%) \div (1+100\%) = 85\%$,即八五折。因此,本题答案选择 C 选项。

4. C 【解析】本题属于平均数问题。利用十字交叉法算得 A、B 两部门的人数之比为 $3 : 4$,B、C 两部门的人数之比为 $4 : 5$,故 A、B、C 三部门的人数之比为 $3 : 4 : 5$,则平均年龄为 $(38 \times 3 + 24 \times 4 + 42 \times 5) \div 12 = 35$ (岁)。因此,答案选择 C 选项。

第十五计 ★★★★★相遇追及问题

黄金法则

相遇距离 = (大速度 + 小速度) × 相遇时间, 追及距离 = (大速度 - 小速度) × 追及时间。

破解密钥

- (1) 当题干中出现“相向”、“背离”、“同向”等字样时, 考虑是否为相遇追及问题。
- (2) 相遇相当于两人合作完成某一段路程, 追及则相当于一人起到的是阻挠的作用并最终被追上的运动过程。

环形运动问题:

同一点反向运动: 环形周长 = (大速度 + 小速度) × 相遇时间;

同一点同向运动: 环形周长 = (大速度 - 小速度) × 相遇时间。

直线往返相遇问题:

左右点出发: 第 N 次迎面相遇, 路程和 = 全程 × (2N - 1)。

同一点出发: 第 N 次迎面相遇的路程和 = 全程 × 2N; 第 N 次追上相遇的路程差 = 全程 × 2N。

队伍行进问题:

队头 → 队尾: 队伍长度 = (人速 + 队伍速度) × 时间; 队尾 → 队头: 队伍长度 = (人速 - 队伍速度) × 时间。注: 流水行船、上下扶梯与队伍行进问题相似。

魔力四射

【例 1】(2011 年浙江) a 大学的小李和 b 大学的小孙分别从自己学校同时出发, 不断往返于 a、b 两校之间, 现已知小李的速度为 85 米/分, 小孙的速度为 105 米/分, 且经过 12 分钟后两人第二次相遇, 问 a、b 两校相距多少米? ()



A. 1140

B. 980

C. 840

D. 760

【解析】本题考查直线往返相遇。小孙和小李第二次相遇时,两人共同完成了3个全程,所以a、b两校相距 $(85+105)\times 12\div 3=190\times 4=760$ (米)。因此,答案选择D选项。

【例2】(2010年上海)一支部队排成长度为800米的队列行军,速度为80米/分,在队首通讯员以3倍于行军的速度跑步到队尾,花1分钟传达首长命令后,立即以同样的速度跑回队首,在其往返过程中通讯员共花费的时间为()。

A. 7.5分钟

B. 8分钟

C. 8.5分钟

D. 10分钟

【解析】本题考查队伍行进问题。题干中包含两个阶段的运动,第一阶段是队伍追及,第二阶段是反向队伍相遇问题,通讯员速度为 $80\times 3=240$ (米/分)。总时间为 $\frac{800}{240+80}+1+\frac{800}{240-80}=8.5$ (分)。因此,答案选择C选项。

【例3】(2008年江西)在同一环形跑道上小陈比小王跑得快,两人都按同一方向跑步锻炼时,每隔12分钟相遇一次;若两人速度不变,其中一人按相反方向跑步,则每隔4分钟相遇一次。问两人跑完一圈花费的时间小陈比小王多几分钟?()

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

【解析】不妨设小王和小陈速度分别为 x 、 y ,跑道长度为 s ,则两人都按同一方向跑步锻炼时,每隔12分钟相遇一次,说明 $s\div(x-y)=12$ 。若两人速度不变,其中一人按相反方向跑步,则每隔4分钟相遇一次,说明 $s\div(x+y)=4$,联立解得 $s=6x=12y$,所以两人跑完一圈花费的时间小陈比小王多 $\frac{s}{y}-$

$\frac{s}{x}=12-6=6$ (分)。因此,本题答案选择B项。

【例4】(2013年春季联考)小张、小王二人同时从甲地出发,驾车匀速在甲乙两地之间往返行驶。小张的车速比小王快,两人出发后第一次和第二次相遇都在同一地点,问小张的车速是小王的几倍?()

A. 1.5

B. 2

C. 2.5

D. 3

【解析】 本题考查往返相遇问题。设甲乙两地的距离为 s ，第一次相遇时小张的路程为 x ，则可得：

	第一次相遇	第二次相遇
总路程	$2s$	$2s$
小张路程	x	$2(2s-x)$
小王路程	$2s-x$	
$x=2(2s-x)$ ，进而得 $x=\frac{4}{3}s$ ， $2s-x=\frac{2}{3}s$		

在相同的时间里，小张的路程是小王路程的 2 倍，所以小张速度是小王的 2 倍。因此，答案选择 B 选项。

通关自测

【练习 1】 某环形公路长 15 千米，甲、乙两人同时同地沿公路骑自行车反向而行，0.5 小时后相遇，若他们同时同地同向而行，经过 3 小时后，甲追上乙，问乙的速度是多少？（ ）

- A. 12.5 千米/时 B. 13.5 千米/时 C. 15.5 千米/时 D. 17.5 千米/时

【练习 2】 甲、乙两人分别从 A、B 两地同时出发，相向而行，乙的速度是甲的 $\frac{2}{3}$ ，两人相遇后继续前进，甲到达 B 地，乙到达 A 地后立即返回，已知两人第二次相遇的地点距离第一次相遇的地点是 3000 米，则 A、B 两地的距离是（ ）米。

- A. 6000 B. 6500 C. 7000 D. 7500

【练习 3】 一支 600 米长的队伍行军，队尾的通讯员要与最前面的连长联系，他用 3 分钟跑步追上了连长，又在队伍休息的时间以同样的速度跑回了队尾，用了 2 分 24 秒，如队伍和通讯员匀速前进，则通讯员在行军时从最前面跑步回到队尾需要多长时间？（ ）

- A. 48 秒 B. 1 分钟 C. 1 分 48 秒 D. 2 分钟

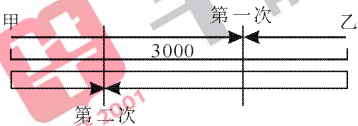
【练习 4】甲、乙两地相距 210 公里，a、b 两辆汽车分别从甲、乙两地同时相向出发并连续往返于两地。从甲地出发的 a 汽车的速度为 90 公里/小时，从乙地出发的 b 汽车的速度为 120 公里/小时。问 a 汽车第 2 次从甲地出发后与 b 汽车相遇时，b 汽车共行驶了多少公里？（ ）

- A. 560 B. 600 C. 620 D. 650

自测答案

1. A 【解析】设甲、乙两人速度分别为 $v_{甲}$ 和 $v_{乙}$ ，则 $0.5(v_{甲} + v_{乙}) = 15$ ， $3(v_{甲} - v_{乙}) = 15$ ，解得 $v_{甲} = 17.5$ ， $v_{乙} = 12.5$ 。因此，本题选择 A 选项。

2. D 【解析】本题属于行程问题。如右图所示，设甲第一次走的路程为 s_1 ，乙第一次走的路程为 s_2 。可以看出，从第一次相



遇到第二次相遇，甲走的路程为 $2s_2 + 3000$ ，乙走的路程为 $2s_1 - 3000$ 。由路程与速度成正比可列方程： $\frac{s_1}{s_2} = \frac{2s_2 + 3000}{2s_1 - 3000} = \frac{3}{2}$ 。解

得 $s_1 = 4500$ ， $s_2 = 3000$ 。因此 A、B 两地相距 $4500 + 3000 = 7500$ (米)。因此答案选择 D 选项。

3. D 【解析】设通讯员的速度为 V_1 ，队伍的速度为 V_2 ，2 分 24 秒是 2.4 分钟，由题意列方程组有：
$$\begin{cases} 600 = (V_1 - V_2) \times 3 \\ 600 = V_1 \times 2.4 \end{cases}$$
，解得 $V_1 = 250$ ， $V_2 = 50$ 。可得行军时通讯员从队首到队尾需要的时间 = $\frac{600}{V_1 + V_2} = 2$ (分)。因此，答案选择 D 选项。

4. B 【解析】本题考查往返相遇问题。a 汽车第 2 次从甲地出发后与 b 汽车相遇，实际上是两辆车的第三次相遇，相遇 n 次的总路程为 $2n - 1$ 个全程，所以本题中第三次相遇的总路程为 $5 \times 210 = 1050$ 公里，那么第三次相遇的时间为 $1050 \div (90 + 120) = 5$ 小时，b 行驶的路程 $120 \times 5 = 600$ 公里。因此，答案选择 B 选项。

第十六计 ★★★钟表问题

黄金法则

时钟表盘分 12 大格, 每格 30° , 时针转速为 $0.5^\circ/\text{分}$, 分针转速为 $6^\circ/\text{分}$ 。

破解密钥

(1) 钟表问题本质为环形相遇追及问题, 考查路程差或路程和, 主要依据 $s=vt$ 进行求解; (2) 复杂钟表问题即为快慢钟问题, 这种题型一般采用比例法解决。

钟表基本常识:

时针每小时转 30° , 每分钟转 0.5° ; 分针每小时转 360° , 每分钟转 6° 。

钟面上每两格之间为 30° , 时针与分针成某个角度时一般都有对称的两种情况。

分针与时针一昼夜重合 22 次, 成直角 44 次, 成 180° 角 22 次。

快慢钟问题:

快慢钟问题的参照物为标准时间, 快慢钟问题一般采用比例法解题。

魔力四射

【例 1】(2010 年黑龙江) 张某下午六点多外出买菜, 出门时看手表, 发现表的时针和分针的夹角为 110° , 七点前回到家时又看手表, 发现时针和分针的夹角仍是 110° , 问张某外出买菜用了多长时间? ()

- A. 20 分钟 B. 30 分钟 C. 40 分钟 D. 50 分钟

【解析】本题考查钟表问题。根据题意可知, 第一次时针和分针成 110° , 应该是时针在前分针在后; 第二次则是时针在后分针在前, 因此分针比时针多运动了 220° , 即表盘运动的路程差为 220° 。时

针每分钟转 0.5° ，分针每分钟转 6° ，因此所需要的时间为 $220 \div (6 - 0.5) = 40$ (分)。因此，答案选择 C 选项。

【例 2】(2012 年广东) 小张的手表和闹钟走时都不准，手表比标准时间每 6 小时快 2 分钟，闹钟比标准时间每 6 小时慢 5 分钟。一天，小张发现手表指示 9 点 27 分时，闹钟刚好指示 9 点 41 分，那么至少要经过() 小时，手表和闹钟才能指示同一时刻。

- A. 6 B. 9 C. 12 D. 13

【解析】 本题考查钟表问题中的快慢钟问题。根据题意，手表 6 小时快 2 分钟，闹钟 6 小时慢 5 分钟，则闹钟每 6 小时比手表慢 7 分钟，9 点 41 和 9 点 27 相差 14 分钟， $14 \div 7 = 2$ ，则经过 2 个 6 小时，即 12 小时手表会追上闹钟，也就是说手表 12 小时后会与闹钟显示同一时刻。因此，答案选择 C 选项。

【例 3】(2010 年浙江) 有一只怪钟，每昼夜设计成 10 小时，每小时 100 分钟，当这只怪钟显示 5 点时，实际上是 12 点。当这只怪钟显示 8 点 50 分的时候，实际上是什么时间？()

- A. 17 点 50 分 B. 18 点 10 分 C. 20 点 04 分 D. 20 点 24 分

【解析】 正常的时钟一昼夜是 $24 \times 60 = 1440$ (分)，而怪钟是 $10 \times 100 = 1000$ (分)，怪钟走一分钟则正常时间为 $1440 \div 1000 = 1.44$ (分)。怪钟从显示 5 点到显示 8 点 50 分，总共走了 $3 \times 100 + 50 = 350$ (分)，对应正常时间为 $350 \times 1.44 = 504$ (分)，从中午 12 点过 504 分钟，是 20 点 24 分。因此，本题答案选择 D 项。

【例 4】 有一只钟，每小时慢 3 分钟，早晨 4 点 30 分的时候，把钟对准了标准时间，则钟走到当天上午 10 点 50 分的时候，标准时间是()

- A. 11 点整 B. 11 点 5 分 C. 11 点 10 分 D. 11 点 15 分

【解析】 本题考查快慢钟问题。每小时慢 3 分钟，可以得到比例 $60 : 57 = 20 : 19$ ，即标准时间 60 分钟，这只钟运行 57 分钟，早晨 4 点 30 分至 10 点 50 分共计 380 分钟， $20 : 19 = 400 : 380$ ，即这只钟运行 380 分钟，标准时间为 400 分钟 = 6 小时 40 分钟，进而得到标准时间为 11 点 10 分。因此，答案选择 C 选项。

通关自测

【练习 1】(2008 年上海) 1898 年 4 月 1 日星期五，三只新时钟被调到相同的时间：中午 12 点。第

二天中午,发现 A 钟的时间完全准确,B 钟正好快了 1 分钟,C 钟正好慢了 1 分钟。现在假设三个钟都没有被调,它们保持着各自的速度继续走而且没有停。那么到(),三只时钟的时针分针会再次都指向 12 点。

- A. 1900 年 3 月 20 日正午 12 点 B. 1900 年 3 月 21 日正午 12 点
C. 1900 年 3 月 22 日正午 12 点 D. 1900 年 3 月 23 日正午 12 点

【练习 2】某时刻时针和分针正好成 90 度的夹角,问至少经过多少时间,时针和分针又一次成 90 度夹角?()

- A. 30 分钟 B. 31.5 分钟 C. 32.2 分钟 D. 32.7 分钟

【练习 3】3 点 19 分时,时钟上的时针与分针所构成的锐角为几度?

- A. 14 度 B. 14.5 度 C. 15 度 D. 15.5 度

【练习 4】一个快钟每小时比标准时间快 3 分钟,一个慢钟每小时比标准时间慢 2 分钟。如果将两个钟同时调到标准时间,结果在 24 小时内,快钟显示 11 点整时,慢钟显示 9 点半。此时的标准时间是()。

- A. 10 点 35 分 B. 10 点 10 分 C. 10 点 15 分 D. 10 点 06 分

自测答案

1. C 【解析】因为在一天的时间内,B 钟正好快了 1 分钟,C 钟正好慢了 1 分钟。当它们再一次指向 12 点时,B 钟多走 12 小时和 C 钟少走 12 小时,共需的时间为 $12 \times 60 = 720$ (天)。也就是说,720 天后,三只时钟的时针分针再次都指向 12 点。1898 年 4 月 1 日以后的天数为 $365 - (31 + 28 + 31) = 275$ (天),1899 年全年为 365 天,则 720 天后应为 1900 年的某一天, $720 - 275 - 365 = 80$ (天),1900 年的第 80 天应为 3 月 21 日。因此,本题答案选择 B 项。

2. D 【解析】本题考查钟表问题。时针与分针的夹角为 90° 共有两种情况:一是顺时针方向时针在前,分针在后;二是顺时针方向时针在后,分针在前。第一种情况下时针与分针再次构成 90° 所需时间最短。当分针比时针多运动了 180° ,即表盘运动的路程差为 180° 时再次构成直角。时针每分钟转 0.5° ,分针每分钟转 6° ,可得时间为 $180 \div (6 - 0.5) \approx 32.7$ 分钟。所以选择 D 选项。



3. B 【解析】本题考查钟表问题。3点整时时针与分针夹角为90度,分针的速度为6度/分,时针的速度为0.5度/分,则19分钟分针比时针多转的角度为 $19 \times (6 - 0.5) = 104.5$ 度,从而得到3点19分时针与分针所成锐角为 $104.5 - 90 = 14.5$ 度。因此,答案选择B选项。

4. 【解析】本题考查快慢钟问题。由题干信息可得,快钟、标准时间与慢钟的速度比例为63:60:58,即快钟运行63份时间,标准时间60份,慢钟58份,快钟比慢钟多5份,9点半距离11点钟为90分钟,即5份=90分钟,1份=18分钟,那么此时标准时间为9点半过 $36(2 \times 18)$ 分钟,即10点06分。因此,答案选择D选项。



洛书与幻方

相传,在大禹治水年代,陕西的洛水经常泛滥。每当洪水泛滥的季节来临,人们便抬着猪羊去河边祭神。每一次等人们摆好祭品,总有一个大乌龟从河中爬出来,慢吞吞地绕祭品转一圈。大乌龟走后,河水又照样泛滥。后来人们开始留心大乌龟,发现龟壳有9大块,横数三行,竖数三行,每一块壳上都有几个小点点,正好凑成从1到9的数字,可是谁也弄不懂是什么意思。有一年,大乌龟又爬上岸,忽然一个看热闹的小孩惊奇地叫了起来:“多有趣,这些小点点无论是横加、竖加、斜加算出来都是15。”人们想,河神大概是每样祭品都要15份,赶紧抬来15头猪、15头羊,河水再也不泛滥了。乌龟壳上这些点点后来被称为“洛书”,而像这样具有奇妙性质的图案叫“幻方”。

第十七计 ★★★★★ 比例法

 黄金法则

若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $\frac{a}{b} = \frac{a \pm c}{b \pm d}$, $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ 。

 破解密钥

当题目中出现分数、百分数、比例关系时,可以采取比例法答题。用比例法解题的关键是找到题干条件中各量值之间的比例关系,找到比例差值与实际差值之间的对应关系,从而求出各项数值。

行程问题:

路程 = 速度 \times 时间,若时间一定,则路程与速度成正比,即 t 一定, $\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2}$; 路程一定,速度与时间成反比关系,即 s 一定, $\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1}$ 。

溶液问题:

溶质 = 溶液 \times 浓度,当溶质的量一定时,溶液的量与浓度成反比。

整体与局部:

若甲 = $\frac{n}{m}$ 乙,则甲 = $\frac{n}{m+n}$ (甲 + 乙)。

工程问题:

工作量 = 工作效率 \times 工作时间,当工作量一定时,工作效率与工作时间成反比例关系。

比例关系:

若 $a : b = m : n$ (m, n 互质),则 a 占 m 份,且 a 是 m 的倍数, b 占 n 份,且 b 是 n 的倍数。

三项连比:

若甲 : 乙 = $a : b$, 乙 : 丙 = $c : d$, 则甲 : 乙 : 丙 = $ac : bc : bd$ 。

魔力四射

【例 1】(2008 年广东)甲、乙二人同时从 A 地去 B 地,甲每分钟行 60 米,乙每分钟行 90 米,乙到达 B 地后立即返回,并与甲相遇,相遇时,甲还需行 3 分钟才能到达 B 地,问 A、B 两地相距多少米? ()

- A. 1350 B. 1080 C. 900 D. 720

【解析】本题考查行程问题。甲乙相遇时,乙的路程比甲的路程多 $2 \times 60 \times 3 = 360$ (米),且甲乙的总路程为 2 个全程。甲乙同时出发,所以运动时间相同,则速度与路程成正比,所以相遇时 $S_{甲} : S_{乙} = 60 : 90 = 2 : 3$,也就是说乙比甲多 1 份,则 1 份 = 360 米,从而得到两地相距 $(2+3) \times 360 \div 2 = 900$ (米)。因此,答案选择 C 选项。

【例 2】(2011 年浙江)甲、乙两辆清洁车执行东、西城间的公路清扫任务。甲车单独清扫需要 6 小时,乙车单独清扫需要 9 小时,两车同时从东、西城相向开出,相遇时甲车比乙车多清扫 15 千米。问东、西两城相距多少千米? ()

- A. 60 B. 75 C. 90 D. 135

【解析】本题考查行程问题。两地距离一定,所以甲、乙两车的时间与速度成反比,所以甲速 : 乙速 = $9 : 6 = 3 : 2$,两车同时从两城相向开出,时间相同,即速度与路程成正比,设两城相距的路程为 5 份,则甲清扫了 3 份,乙清扫了 2 份,甲比乙多清扫了 1 份,因此 1 份是 15 千米,东西两城相距 $5 \times 15 = 75$ (千米)。因此,答案选择 B 选项。

【例 3】(2010 河北政法)两个相同的瓶子装满酒精溶液,一个瓶子中酒精与水体积之比是 3 : 1,另一个瓶子中酒精与水的体积比是 4 : 1,若把两瓶酒精溶液混合,则混合后的酒精和水的体积之比是多少? ()

- A. 31 : 9 B. 7 : 2 C. 31 : 40 D. 20 : 11

【解析】本题考查抽象型溶液问题。由于两个瓶子的总体积相同,所以假设两瓶子的体积都为 20,则第一个瓶子中酒精与水的体积分别为 15、5,第二个瓶子中酒精与水的体积分别为 16、4,混合后的酒精与水的体积分别为 31、9。因此,答案选择 A 选项。

【例 4】(2010 年江苏)某城市有 A、B、C、D 四个区, B、C、D 三区的面积之和是 A 的 14 倍, A、C、D 三区的面积之和是 B 的 9 倍, A、B、D 三区的面积之和是 C 区的 2 倍, 则 A、B、C 三区的面积之和是 D 区的()。

- A. 1 倍 B. 1.5 倍 C. 2 倍 D. 3 倍

【解析】 本题考查整体与局部。B、C、D 三区的面积之和是 A 的 14 倍, 则 A 占城市面积的 $\frac{1}{15}$; 同理可得, B、C 分别占城市面积的 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{3}$, 则 D 区占城市面积的比重为 $1 - \frac{1}{15} - \frac{1}{10} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, 故 A、B、C 三区的面积之和是 D 区的 1 倍。因此, 本题答案选择 A 选项。

【例 5】(2012 年河北)一个农贸市场 2 斤油可换 5 斤肉, 7 斤肉可换 12 斤鱼, 10 斤鱼可换 21 斤豆, 那么 27 斤豆可换几斤油? ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【解析】 本题属于连比问题, 可采用设整法。设豆子的单价为 10, 则鱼的单价为 21, 肉的单价为 36, 油的单价为 90, 所以 27 斤豆的价格为 270, 可换 3 斤油。因此答案选择 A 选项。

通关自测

【练习 1】某部队从驻地乘车赶往训练基地, 如果车速为 54 公里/时, 正好准点到达; 如果将车速提高 $\frac{1}{9}$, 就可以比预定的时间提前 20 分钟赶到; 如果将车速提高 $\frac{1}{3}$, 可比预定的时间提前多少分钟赶到? ()

- A. 30 B. 40 C. 50 D. 60

【练习 2】小红和小强同时从家里出发相向而行。小红每分走 52 米, 小强每分走 70 米, 二人在途中的 A 处相遇。若小红提前 4 分出发, 且速度不变, 小强每分走 90 米, 则两人仍在 A 处相遇。小红和小强两人的家相距多少米? ()

- A. 2800 米 B. 2196 米 C. 2488 米 D. 2698 米

【练习 3】甲、乙两人进行 100 米赛跑比赛, 结果甲领先乙 10 米到达终点。如果乙和丙进行 100 米

赛跑,则乙领先丙 10 米取胜。现在甲和丙进行同样的比赛,则甲到达终点时丙跑了多少米? ()

- A. 19 米 B. 20 米 C. 80 米 D. 81 米

【练习 4】某公司三名销售人员 2011 年的销售业绩如下:甲的销售额是乙和丙销售额的 1.5 倍,甲和乙的销售是丙的销售额的 5 倍,已知乙的销售额是 56 万元,则甲的销售额为()。

- A. 140 万元 B. 144 万元 C. 98 万元 D. 112 万元

自测答案

1. C 【解析】路程一定,速度与时间成反比,分析题干可知三次速度之比为 $1 : \frac{10}{9} : \frac{4}{3} = 9 : 10 : 12$,则时间比为 $\frac{1}{9} : \frac{1}{10} : \frac{1}{12} = 20 : 18 : 15$ 。第二次比第一次时间少 2 份,提前了 20 分钟,则相当于 1 份等于 10 分钟,则速度提升 $\frac{1}{3}$ 时,可比预定时间少 50 分钟。因此,本题答案选择 C 选项。

2. B 【解析】本题考查行程问题。两人相遇的地点不变,小红的速度不变,则每次相遇小红的总时间是不变的。路程一定时速度和时间成反比,小强的速度之比是 $70 : 90 = 7 : 9$,那么小强两次的时间之比为 $9 : 7$,第一次比第二次多 2 份,时间多出 4 分钟,所以 1 份 = 2 分钟,也就是说第一次相遇需要 18 分钟,两家相距 $(52 + 70) \times 18 = 2196$,或者根据结果能被 9 整除,可知本题答案为 B 选项。

3. D 【解析】本题考查行程问题。由题意可得,甲速 : 乙速 = $100 : 90$,乙速 : 丙速 = $100 : 90$,进而得到甲速 : 乙速 : 丙速 = $100 : 90 : 81$,从而发现甲到达终点时,丙的路程应为 81 米。因此,答案选择 D 选项。

4. B 【解析】本题考查比例问题。甲的销售额是乙和丙销售额的 1.5 倍,则甲占总销售额的比重为 $\frac{3}{5}$;同理可得丙所占比重为 $\frac{1}{6}$,则乙所占比重为 $1 - \frac{3}{5} - \frac{1}{6} = \frac{7}{30}$,所以总的销售额为 $56 \div \frac{7}{30} = 240$ (万元),甲的销售额为 $240 \times \frac{3}{5} = 144$ (万元)。因此,本题答案选择 B 选项。

第十八计 ★★★调和平均数

黄金法则

调和平均数计算公式： $\bar{a} = \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2}$ ，本质在于 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a_2}$ 成等差数列。

破解密钥

题干中出现了“等距离”“等费用”“等溶质”“等间隔”等这些字眼时，首先要考虑的是调和平均数的解题方法。

等距离平均速度：

v_1 与 v_2 所经历的路程相同，求解平均速度，

$$\bar{v} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

等费用平均价格：

p_1 与 p_2 所消耗的费用相同，求解平均价格，

$$\bar{p} = \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2}$$

等间隔发车时间：

t_1 与 t_2 所经历的路程相同，求解发车间隔时间，

$$t = \frac{2t_1 t_2}{t_1 + t_2}$$

等溶质增减浓度：

r_1 与 r_3 所蒸发的溶剂相同，求解中间一次浓度，

$$r_2 = \frac{2r_1 r_3}{r_1 + r_3}$$

魔力四射

【例 1】(2012 年江苏) 在村村通公路的社会主义新农村建设中，有两个山村之间的公路都是上坡和下坡，没有平坦路。农车上坡的速度保持 20 千米/时，下坡的速度保持 30 千米/时，已知农车在两个山村之间往返一次，需要行驶 4 小时，问两个山村之间的距离是多少千米？()

A. 45

B. 48

C. 50

D. 24



【解析】 本题考查行程问题。在往返的4小时里,上坡路程=下坡路程=总路程,因此往返运动的平均速度为 $v = \frac{2 \times 20 \times 30}{20 + 30} = 24$ (千米/时),因此两地的路程 $= 24 \times 4 \div 2 = 48$ (千米)。因此,答案选择B选项。

【例2】 (2010年浙江) 已知盐水若干千克,第一次加入一定量的水后,盐水浓度变为6%,第二次加入同样多的水后,盐水浓度变为4%,第三次再加入同样多的水后,盐水的浓度为多少? ()

- A. 3% B. 2.5% C. 2% D. 1.8%

【解析】 本题考查溶液问题的反复稀释。分析题干可以发现稀释过程中溶质保持不变,且每次加入的水是等量的,符合调和平均数的基本要求,假设第三次加入水后浓度变为 $a\%$, 则 $4\% = \frac{2 \times 6\% \times a\%}{6\% + a\%}$, 解得 $a\% = 3\%$ 。因此,答案选择A选项。

【例3】 (2012年国考) 某市气象局观测发现,今年第一、二季度本市降水量分别比去年同期增加了11%和9%,而两个季度降水量的绝对增量刚好相同。那么今年上半年该市降水量同比增长多少? ()

- A. 9.5% B. 10% C. 9.9% D. 10.5%

【解析】 设今年一、二季度降水量增量均为 x , 一、二季度降水量增长率分别为 r_1 和 r_2 , 则今年上半年增长率为 $\frac{2x}{\frac{x}{r_1} + \frac{x}{r_2}} = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{2 \times 9\% \times 11\%}{9\% + 11\%} = 9.9\%$ 。因此,答案选择C选项。

【例4】 (2009年广东) 地铁检修车沿地铁线路匀速前进,每6分钟有一列地铁从后面追上,每2分钟有一列地铁迎面开来。假设两个方向的发车间隔和列车速度相同,则发车间隔是()。

- A. 2分钟 B. 3分钟 C. 4分钟 D. 5分钟

【解析】 本题属于发车间隔问题。设两列地铁间的距离为 s , 则二者速度差为 $\frac{s}{6}$, 速度和为 $\frac{s}{2}$, 则地铁的速度为 $(\frac{s}{2} + \frac{s}{6}) \div 2$, 则发车间隔为 $\frac{2s}{\frac{s}{2} + \frac{s}{6}} = \frac{2 \times 2 \times 6}{2 + 6} = 3$ (分)。因此,本题答案选择B选项。

通关自测

【练习 1】某深山区甲、乙两个村之间的公路全是山坡没有平路，已知一汽车上坡时每小时 30 公里，下坡时每小时 45 公里，该汽车从甲村去乙村耗时 6.5 小时，从乙村回甲村耗时 5 小时，则甲、乙两村之间的公路有()公里。

- A. 180 B. 207 C. 240 D. 275

【练习 2】某种溶液的浓度为 20%，加入水后溶液的浓度变为 15%，如果再加入同样多的水，则溶液浓度变为()。

- A. 13% B. 12.5% C. 12% D. 10%

【练习 3】商店购进甲、乙两种不同的糖所用的钱数相等，已知甲种糖每公斤 6 元，乙种糖每公斤 12 元。如果把这两种糖混在一起成为什锦糖，那么这种什锦糖每公斤的成本是()元。

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

自测答案

1. B 【解析】本题可应用等距离平均速度公式。汽车在甲、乙两村间往返的平均速度是 $\frac{2 \times 30 \times 45}{30 + 45} = 36$ (公里/时)。而这两段路所用时间是 $6.5 + 5 = 11.5$ (时)，因此这段路长为 $36 \times 11.5 \div 2 = 207$ (公里)。因此，答案选择 B 选项。

2. C 【解析】本题考查溶液问题的反复稀释。稀释过程中溶质保持不变，且每次加入的水是等量的，符合调和平均数的基本要求，假设第三次加入水后浓度变为 $x\%$ ，则 $\frac{2 \times 20\% \times x\%}{20\% + x\%} = 15\%$ ，解得 $x\% = 12\%$ 。因此，答案选择 C 选项。

3. B 【解析】设购买甲、乙两种糖均花费 M 元，则可得平均价格为 $\frac{2M}{\frac{M}{6} + \frac{M}{12}} = \frac{2 \times 6 \times 12}{6 + 12} = 8$ (元)。因此，本题选择 B 选项。



第十九计 ★★★牛吃草问题

 黄金法则

牛吃草问题的核心在于原有量不变,要依据原有量不变列等式。

 破解密钥

牛吃草问题的常见四种题型:牛吃草,抽水机抽水,检票口检票,资源开采。

列方程解牛吃草

核心公式: $Y=(N-X) \times T$;

“Y”代表现有存量(如“原有草量”);“N”代表使原有存量减少的变量(如“牛数”);“X”代表存量的自然增速(如“草的生长速度”);“T”代表存量完全消失所需时间。

解题时往往根据题干中已知的数字信息列方程组:

$$\begin{cases} Y=(N_1-X) \times T_1 \\ Y=(N_2-X) \times T_2 \end{cases}, \text{通过求解方程组进而}$$

得到题目的答案。

 魔力四射

【例 1】(2012 年浙江)某演唱会检票前若干分钟就有观众开始排队等候入场,而每分钟来的观众人数一样多。从开始检票到等候队伍消失,若同时开 4 个入场口需 50 分钟,若同时开 6 个入场口则需 30 分钟。问如果同时开 7 个入场口需几分钟? ()

列表分析解牛吃草

也可以依据原有量不变,把题目已知信息代入表格,求出 X 的值,再根据 $(N-X) \times T$ 为定值求解未知量,表格如下:

N	N-X	T	N×T
N ₁		T ₁	N ₁ ×T ₁
N ₂		T ₂	N ₂ ×T ₂
N ₃		T ₃	
$X = \frac{N_2 T_2 - N_1 T_1}{T_2 - T_1}$		T ₂ - T ₁	N ₂ T ₂ - N ₁ T ₁

A. 18 B. 20 C. 22 D. 25

【解析】 本题考查牛吃草问题。列表如下

N	$N-X$	T	$N \times T$
4		50	200
6		30	180
7		T_3	
$X=1$		20	20

根据 $(6-1) \times 30 = (7-1)T_3$, 解得 $T_3 = 25$ 。因此, 答案选择 D 选项。**【例 2】** (2009 年山西政法) 一片草地 (草以均匀速度生长), 240 只羊可以吃 6 天, 200 只羊可以吃 10 天, 则这片草地可供 190 只羊吃的天数是 ()。

A. 11 B. 12 C. 14 D. 15

【解析】 本题考查牛吃草问题。列表如下

N	$N-X$	T	$N \times T$
240		6	1440
200		10	2000
190		T_3	
$X=140$		4	560

根据 $(240-140) \times 6 = (190-140)T_3$, 解得 $T_3 = 12$ 。因此, 答案选择 B 选项。**【例 3】** (2009 年江苏) 有一池泉水, 泉底均匀不断涌出泉水。如果用 8 台抽水机 10 小时能把全池水抽干或用 12 台抽水机 6 小时能把全池水抽干。如果用 14 台抽水机把全池水抽干, 则需要的时间是 ()。

A. 5 小时 B. 4 小时 C. 3 小时 D. 5.5 小时

【解析】 本题考查牛吃草问题。列表如下:

N	$N-X$	T	$N \times T$
8		10	80
12		6	72
14		T_3	
$X=2$		4	8

根据 $(8-2) \times 10 = (14-2)T_3$, 解得 $T_3=5$ 。因此, 答案选择 A 选项。

【例 4】(2011 年北京) 假设某地森林资源的生长速度是一定的, 且不受自然灾害等影响, 那么若每年开采 110 万立方米, 则可开采 90 年, 若每年开采 90 万立方米则可开采 210 年。为了使这片森林可持续开发, 则每年最多开采多少万立方米? ()

- A. 30 B. 50 C. 60 D. 75

【解析】 本题考查牛吃草问题。列表如下

N	$N-X$	T	$N \times T$
110		90	9900
90		210	18900
N_3			∞
$X=75$		120	9000

由图表可知, 自然资源的增长量为 75, 只要开采量不超过资源增长量, 则森林可以持续开发, 故最大量为 75。因此, 答案选择 D 选项。

通关自测

【练习 1】 有一个牧场, 每天都生长相同数量的草, 若放 50 头牛, 则 9 天吃完牧场的草; 若放 40 头牛, 则 12 天吃完。若放 30 头牛, 则多少天吃完()?

- A. 15 B. 18 C. 20 D. 24

【练习 2】一个蓄水池装有 8 根出水管,1 根进水管。如果把 8 根进水管全部打开,需 3 小时把池内的水全部排完;如果仅打开 5 根出水管,需 6 个小时把池内的水全部排完。问要想在 4.5 小时内把池内的水全部排完,需同时打开几个出水管? ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

【练习 3】某游乐场在开门前有 400 人排队等待,开门后每分钟增加的人数是固定的。一个入口每分钟可以进入 10 名游客,如果开放 4 个入口 20 分钟就没人排队,现在开放 6 个入口,则开门后多少分钟就没有人排队? ()

- A. 10 B. 15 C. 20 D. 30

【练习 4】一个水库在年降水量不变的情况下,能够维持全市 12 万人 20 年的用水量。在该市新迁入 3 万人后,该水库只够维持 15 年的用水量。市政府号召节约用水,希望能将水库的使用寿命提高到 30 年。那么,该市市民平均需要节约多少比例的水才能实现政府制定的目标? ()

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{2}{7}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

自测答案

1. B 【解析】本题考查牛吃草问题。列表如下:

N	$N-X$	T	$N \times T$
50		9	450
40		12	480
30		T_3	
	$X=10$	3	30

根据 $(50-10) \times 9 = (30-10) \times T_3$, 解得 $T_3=18$ 。因此,答案选择 B 选项。

2. B 【解析】本题考查牛吃草问题。列表如下：

N	$N-X$	T	$N \times T$
8		3	24
5		6	30
N_3		4.5	
$X=2$		3	6

根据 $(8-2) \times 3 = (N_3-2) \times 4.5$, 解得 $N_3=6$ 。因此, 答案选择 B 选项。

3. A 【解析】本题考查牛吃草问题。根据公式: $400 = (4 \times 10 - X) \times 20$, 解得 $X=20$, 而 $400 = (6 \times 10 - 20) \times T$, 解得 $T=10$ 。因此, 答案选择 A 选项。

4. A 【解析】本题考查牛吃草问题。根据题干描述, 列表如下:

N	$N-X$	T	$N \times T$
12		20	240
15		15	225
$15 \times (1-a)$		30	
$X=3$		5	15

根据 $(12-3) \times 20 = [15 \times (1-a) - 3] \times 30$, 解得 $a = \frac{2}{5}$ 。因此, 答案选择 A 选项。

第二十计 ★★★ 年龄问题

黄金法则

任何两人年龄差始终不变，两人年龄倍数逐渐变小，同时每过 n 年，每人均长 n 岁。
年龄问题的核心是年龄差不变， n 年后都长 n 岁， n 年前都少 n 岁。

破解密钥

年龄问题常见的解法有：代入排除法，列表分析法以及赋值法。

代入排除法：

题干中出现了两人的年龄倍数关系变化时，一般使用代入排除法。

赋值法：

对于一类难度比较大的题目，当题干中出现分数时往往可以结合整除判断，通过赋值验证会使得计算过程简化。

列表分析法：

公考中的年龄问题趋势是信息含量大，通过列表分析会使得思路清晰、简洁。如：刘女士今年 48 岁，她说“我有两个女儿，当妹妹长到姐姐现在的年龄时，姐妹俩的年龄之和比我那时的年龄还大 2 岁。”问姐姐今年多少岁？

时间	年龄(岁)		
	妹妹	姐姐	妈妈
现在		A	48
N年后	A	A+N	48+N

魔力四射

【例 1】(2009 年内蒙古) 哥哥现在的年龄是弟弟当年年龄的 3 倍，哥哥当年的年龄与弟弟现在的年龄相同，哥哥与弟弟现在年龄的和是 30 岁。问哥哥现在多少岁？()

A. 15

B. 16

C. 18

D. 19



【解析】 本题考查年龄问题,可采用代入排除法,B、D选项不是3的倍数,直接排除。将C选项代入,哥哥现在的年龄是18岁,则弟弟现在的年龄是 $30-18=12$ (岁),年龄差为6岁,弟弟当年的年龄是 $18\div 3=6$ (岁),则哥哥当年的年龄是 $6+6=12$ (岁),符合题意。因此,答案选择C选项。

【例2】 (2012年北京)甲乙丙三人在2008年的年龄(周岁)之和为60,2010年甲是丙年龄的两倍,2011年乙是丙年龄的两倍,问甲是哪一年出生的? ()

- A. 1988 B. 1986 C. 1984 D. 1982

【解析】 本题考查年龄问题。题干中甲的年龄和乙的年龄都与丙年龄有联系,可设2010年丙的年龄为 X ,列表分析如下

时间	年龄		
	甲	乙	丙
2008	$2X-2$	$2X-1$	$X-2$
2010	$2X$	$2X+1$	X
2011		$2(X+1)$	$X+1$

根据 $2X-2+2X-1+X-2=60$,解得 $X=13$,甲2010年的年龄 $=2X=26$,出生于1984年。因此,答案选择C选项。

【例3】 (2011年北京)一个三口之家的年龄和为99,其中,母亲年龄比父亲年龄的 $\frac{3}{4}$ 大7岁,儿子年龄比母亲年龄的 $\frac{1}{5}$ 大7岁。问多少年后,父亲年龄是儿子年龄的2倍? ()

- A. 12 B. 14 C. 15 D. 10

【特征】 本题属于难度较大的年龄问题。

【解析】 解法一:假设母亲、父亲、儿子的年龄分别是 x 、 y 、 z 岁, n 为所求年数,则

$$\begin{cases} x+y+z=99 \\ x=\frac{3}{4}y+7 \\ z=\frac{x}{5}+7 \\ y+n=2(z+n) \end{cases}$$

, 解方程组可得 $x=40, y=44, z=15, n=14$ 。因此, 本题答案为 B 选项。

解法二: 题干中有分数特征, 考虑能否使用赋值法。通过分析题干可知, 父亲的年龄一定是 4 的倍数, 母亲的年龄一定是 5 的倍数。可以假设父亲的年龄是 44 岁, 那么母亲的年龄是 40 岁, 儿子的年龄是 15 岁, 恰好满足题干要求, 父亲与儿子的年龄差是 29 岁, 也就是说当儿子的年龄是 29 岁时满足父亲年龄是儿子的 2 倍。29-15=14(岁), 也就是 14 年后父亲年龄是儿子的 2 倍。因此, 答案选择 B 选项。

通关自测

【练习 1】 今年父亲年龄是儿子年龄的 10 倍, 6 年后父亲年龄是儿子年龄的 4 倍, 则今年父亲、儿子的年龄分别是()。

- A. 60 岁, 6 岁 B. 50 岁, 5 岁 C. 40 岁, 4 岁 D. 30 岁, 3 岁

【练习 2】 刘女士今年 48 岁, 她说: “我有两个女儿, 当妹妹长到姐姐现在的年龄时, 姐妹俩的年龄之和比我到那时的年龄还大 2 岁。” 问姐姐今年多少岁? ()

- A. 23 B. 24 C. 25 D. 不确定

【练习 3】 兄弟俩今年的年龄之和是 35 岁, 当哥哥像弟弟现在这样大时, 弟弟的年龄正好是哥哥年龄的一半, 则哥哥今年的年龄为() 岁。

- A. 20 B. 21 C. 23 D. 22

【练习 4】 孙儿女的平均年龄是 10 岁, 孙儿年龄的平方减去孙女年龄的平方所得的数值, 正好是爷爷出生年份的后两位, 爷爷生于上个世纪 40 年代。问孙儿女的年龄差是多少岁? ()

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8



自测答案

1. D 【解析】本题考查年龄问题,可采用代入排除法。结合常识,60岁生育有6岁的儿子和50岁有5岁的儿子,不太符合社会生活现状,优先代入C、D选项。将C选项代入,6年后父亲年龄是46,不是4的整数倍,排除。将D选项代入,6年后父亲年龄是36岁,儿子年龄是9岁,符合题意。因此,答案选择D选项。

2. C 【解析】本题考查年龄问题。列表如下

时间	年龄(岁)		
	妹妹	姐姐	妈妈
现在		A	48
N年后	A	A+N	48+N

根据题意可得: $A+A+N=48+N+2$,化简得 $A=25$ 。因此,答案选择C选项。

3. B 【解析】本题考查年龄问题。设弟弟当时的年龄为 x ,则哥哥当时的年龄为 $2x$,年龄差为 x 。弟弟今年的年龄为 $2x$,则哥哥今年的年龄为 $3x$,根据 $2x+3x=5x=35$,可知 $x=7$,哥哥今年的年龄为 $3x=21$ (岁)。因此,答案选择B选项。

4. A 【解析】本题考查年龄问题。设孙儿的年龄为 x 岁,孙女的年龄为 y 岁,分析题干可得:

$$\begin{cases} x+y=20 \\ x^2-y^2=\text{年份后两位} \end{cases}$$
 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$,代入A选项,得到 $x^2-y^2=40$,满足条件。因此,答案选择A选项。

第二十一计 ★★★经济利润问题

黄金法则

理清经济利润问题相关概念，列表列方程分析解题思路。

破解密钥

经济利润问题必须先弄清楚常见经济概念的含义，经济问题的常用方法有：列方程、赋值法以及十字交叉法。

另外，分段计费也是经济问题常考的一类题型，采用分段计算的方法。

基本概念：

进价(成本)：商家买入货物的价格

售价：实际卖出货物的价格

利润 = 售价 - 成本：商家赚到的钱

折扣：2 折即为原价的 20%，9 折为原价的 90%

基本公式：

利润率(加价率/加价幅度) = 利润 ÷ 成本 = (售价 - 成本) ÷ 成本 = 售价 ÷ 成本 - 1

打折后的售价 = 原来的售价(定价) × 折扣

总利润 = 总收入 - 总成本 = 单利润 × 销量

魔力四射

【例 1】(2012 年北京)商场销售某种商品的加价幅度为其进货价的 40%，现商场决定将加价幅度降低一半来促销，商品售价比以前降低了 54 元。问该商品原来的售价是多少元？()

- A. 324 B. 270 C. 135 D. 378

【解析】本题考查经济利润问题。假设进价为 10 份，则原来的售价为 14 份，现在的售价为 12 份，比以前减少了 2 份，2 份 = 54 元，则原来的售价 = 14 份 = 54 × 7 = 378(元)。因此答案选择 D 选项。

【例 2】(2010 年国考)一商品的进价比上月低了 5%，但超市按上月售价销售，其利润提高了 6 个



百分点,则超市上月销售该商品的利润率为()。

- A. 12% B. 13% C. 14% D. 15%

【解析】 本题考查经济利润问题。假设上月进价为 100,那么这个月进价为 95,假设售价为 x ,则:

$$\frac{x-95}{95} - \frac{x-100}{100} = 0.06, \text{解之可得 } x=114, \text{则上月的利润率为 } 14\%。 \text{因此,答案选择 C 选项。}$$

【例 3】 (2013 年北京)某服装如果降价 200 元之后再打 8 折出售,则每件亏 50 元。如果直接按 6 折出售,则不赚不亏。如果销售该服装想要获得 100% 的利润,需要在原价的基础上加价多少元? ()

- A. 90 B. 110 C. 130 D. 150

【解析】 本题考查利润率折扣问题。题干给出“直接 6 折销售,不赚不亏”,设服装成本为 $6x$,则服装原价为 $10x$,根据题意可得, $(10x-200) \times 80\% + 50 = 6x$,解得 $x=55$,所以成本 $6x=330$,原价 $10x=550$,想要获得 100% 的利润,则定价应该为 660,需要在原价的基础上加 110 元。因此,答案选择 B 选项。

【例 4】 (2011 年联考)某市规定,出租车合乘部分的车费向每位乘客收取显示费用的 60%,燃油附加费由合乘客人平摊。现有从同一地方出发的三位客人合乘,分别在 D、E、F 点下车,显示的费用分别为 10 元、20 元、40 元,那么在这样的合乘中,司机的营利比正常(三位客人是一起的,只是分别在上述三个地方下车)多()。

- A. 2 元 B. 10 元 C. 12 元 D. 15 元

【解析】 本题考查分段计费。根据题意列表:

下车地点	费用(元)
D	$10 \times 60\% = 6$
E	$20 \times 60\% = 12$
F	$20 \times 60\% + (40 - 20) = 32$
合计	50

由上表可知,三人合乘共需 50 元,正常情况下,司机收取 40 元,司机多营利 $50 - 40 = 10$ (元)。因

此,答案选择 B 选项。

通关自测

【练习 1】某家具店购进 100 套桌椅,每套进价 200 元,按期望获利 50% 定价出售,卖掉 60 套桌椅后,店主为了提前收回资金,打折出售余下的桌椅,售完全部桌椅后,实际利润比期望利润低了 18%,余下的桌椅是打几折出售的? ()

- A. 七五折 B. 八二折 C. 八五折 D. 九五折

【练习 2】有一本畅销书,今年每册书的成本比去年增加了 10%,因此每册书的利润下降了 20%,但是今年的销量比去年增加了 70%。则今年销售该畅销书的总利润比去年增加了()。

- A. 36% B. 25% C. 20% D. 15%

【练习 3】某市居民生活用电每月标准用电量的基本价格为每千瓦时 0.60 元,若每月用电量超过标准用电量,超出部分按照基本价格的 80% 收费。某户九月份的用电量为 100 千瓦时,共交电费 57.60 元,则该市每月标准用电量为()。

- A. 60 千瓦时 B. 70 千瓦时 C. 80 千瓦时 D. 90 千瓦时

【练习 4】某商场开展购物优惠活动:一次购买 300 元及以下的商品九折优惠;一次购买超过 300 元的商品,其中 300 元九折优惠,超过 300 元的部分八折优惠。小王购物第一次付款 144 元,第二次又付款 310 元。如果他一次购买并付款,可以节省多少元? ()

- A. 16 B. 22.4 C. 30.6 D. 48

自测答案

1. C **【解析】**本题考查经济利润问题。期望利润每套 100 元,定价 300 元,假设折扣率为 x ,将题干中的信息填写在表格中如下:



进价	售价	利润	销量	总利润
200	300	100	60	6000
200	$300x$	$300x-200$	40	$40 \times (300x-200)$
$100 \times 100 \times (1-18\%) = 6000 + 40 \times (300x-200)$				

解得 $x=0.85$ 。因此,答案选择 C 选项。

2. A 【解析】本题考查经济利润问题。设去年成本为 10, 利润为 10, 销量为 10, 将题干中的数据相应的填写在表格中, 可以得到:

成本	利润	销量	总利润
10	10	10	100
11	8	17	136

今年的总利润比去年增加 $(136-100) \div 100 \times 100\% = 36\%$ 。因此, 答案选择 A 选项。

3. C 【解析】本题考查分段计费问题。设标准用电量为 x , 则有 $0.6x + 0.48 \times (100-x) = 57$ 。解得 $x=80$ 。因此, 答案选择 C 选项。

4. 【解析】本题考查分段计费问题。第一次付款 144 元, 原价为 $144 \div 0.9 = 160$ 元; 第二次付款 310 元, $310 = 270 + 40$, 则原价为 $270 \div 0.9 + 40 \div 0.8 = 350$ 元, 即两次的总款为 $350 + 160 = 510$ 元, 一次购买需付款 $300 \times 0.9 + 210 \times 0.8 = 438$ 元, 可节省 $144 + 310 - 438 = 16$ 元。因此, 答案选择 A 选项。

第二十二计 ★★★容斥原理

黄金法则

容斥原理的本质是先不考虑重叠情况,将所有集合的数目相加,然后再逐步“去重复”。

破解密钥

“条件与提问”都可以直接代入公式求解。反之,采用文氏图法或文氏图与公式法相结合。

两集合标准公式:

$$A \cup B = A + B - A \cap B$$

即:满足条件 I 的个数 + 满足条件 II 的个数 - 两者都满足的个数 = 总数 - 两者都不满足的个数

注:二集合容斥题目,经常会与整除判断思想结合出考题。

三集合标准公式:

$$A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - B \cap C - C \cap A + A \cap B \cap C$$

(用图示法解题时,应由中心向外进行标注)

魔力四射

【例 1】(2011 年广东)两人参加竞赛,甲做错了总数的 $\frac{1}{3}$,乙做错了 6 道题,两人都做错了总数的 $\frac{1}{5}$,两人都做对的题有()道。

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

【解析】本题考查容斥原理。假设总题量为 $15x$,则甲做错了 $5x$,甲乙都做错了 $3x$,由于两人都做错的题数不多于乙做错的题数,故 $3x \leq 6$,可得 $x \leq 2$ 。

若 $x=1$,则总题量为 15 道,甲做错 5 道,乙做错 6 道,两人都做错的为 3 道,由两集合容斥原理公式可得,都做对的题目为 $15 - (5 + 6 - 3) = 7$ (道),符合要求。



若 $x=2$, 则总题量为 30 道, 甲做错 10 道, 乙做错 6 道, 两人都做错的为 6 道, 由两集合容斥原理公式可得, 都做对的题目为 $30-(10+6-6)=20$ (道), 无选项。故选 C。

【例 2】(2012 年河北)某乡镇对集贸市场 36 种食品进行检查, 发现超过保质期的 7 种, 防腐添加剂不合格的 9 种, 产品外包装标识不规范的 6 种。其中, 两项同时不合格的 5 种, 三项同时不合格的 2 种。问三项全部合格的食品有多少种? ()

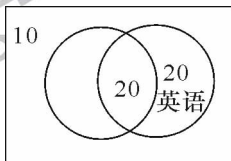
- A. 14 B. 21 C. 23 D. 32

【解析】 本题考查三集合容斥。把不合格当做限制条件, $7+9+6$, 其中, 两项不合格的产品计算了两次, 三项不合格的产品计算了 3 次, 因此不合格的产品 $=7+9+6-5-2 \times 2=13$, 全部合格的产品 $=36-13=23$ 。因此, 答案选择 C 选项。

【例 3】(2012 年河南选调)某单位举办计算机和英语两项培训, 参加计算机培训的人数占单位总人数的 $\frac{2}{3}$, 参加英语培训的有 40 人, 两项培训都参加的人数正好与只参加英语培训的人数相等, 且是两项培训都不参加的人数的两倍。问该单位有多少人? ()

- A. 60 B. 90 C. 120 D. 180

【解析】 本题考查容斥原理。画图如下。



从图中可以看出, 只参加英语培训的人和两项都参加的人这两项相等, 都是 20 人。设单位人数有 x 个, 由题意有 $x-10=\frac{2}{3}x+40-20$, 得 $x=90$ 。因此, 答案选择 B 选项。

【例 4】(2012 年河北)某通讯公司对 3542 个上网客户的上网方式进行调查, 其中 1258 个客户使用手机上网, 1852 个客户使用有线网络上网, 932 个客户使用无线网络上网。如果使用不只一种上网

方式的有 352 个客户,那么三种上网方式都使用的客户有多少个? ()

- A. 148 B. 248 C. 350 D. 500

【解析】 本题考查容斥原理。设三种上网方式都使用的客户有 X 个,则使用两种上网方式的客户有 $(352 - X)$ 个,根据容斥原理可得: $3542 = 1258 + 1852 + 932 - (352 - X) - 2X$,解得 $X = 148$ 。因此,答案选择 A 选项。

通关自测

【练习 1】 小明和小强参加同一次考试,如果小明答对的题目占题目总数的 $\frac{3}{4}$,小强答对了 27 道题,他们两人都答对的题目占题目总数的 $\frac{2}{3}$,那么两人都没有答对的题目共有()。

- A. 3 道 B. 4 道 C. 5 道 D. 6 道

【练习 2】 对 39 种食物中是否含有甲、乙、丙三种维生素进行调查,结果如下:含甲的有 17 种,含乙的有 18 种,含丙的有 15 种,含甲、乙的有 7 种,含甲、丙的有 6 种,含乙、丙的有 9 种,三种维生素都不含的有 7 种,则三种维生素都含的有多少种? ()

- A. 4 B. 6 C. 7 D. 9

【练习 3】 一批游客中每人都去了 A、B 两个景点中至少一个。只去了 A 的游客和没去 A 的游客数量相当,且两者之和是两个景点都去了的人数的 3 倍。则只去一个景点的人数占游客总人数的比重为()。

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{5}{6}$

【练习 4】 某公司招聘员工,按规定每人至多可投考两个职位,结果共 42 人报名,甲、乙、丙三个职位报名人数分别是 22 人、16 人、25 人,其中同时报甲、乙职位的人数为 8 人,同时报甲、丙职位的人数为 6 人,那么同时报乙、丙职位的人数为()。

- A. 7 人 B. 8 人 C. 5 人 D. 6 人

自测答案

1. D **【解析】** 本题考查容斥原理问题,设总题目为 x , x 应该是 3 和 4 的倍数,即 12 的倍数。



根据题意 $(2/3)x \leq 27 \leq x$, 解得 $27 \leq x \leq 40.5$, 故 $x=36$ 。则小明答对了 27 道, 两人都答对 24 道, 设两人都答错的题目有 y 道, 根据公式, $27+27-24=36-y$, 解得 $y=6$, 因此, 答案选择 D 选项。

2. A 【解析】本题考查容斥原理。设三种维生素都含的有 x 种, 根据公式 $17+18+15-7-6-9+x=39-7$, 解得 $x=4$ 。因此, 答案选择 A 选项。

3. B 【解析】本题考查容斥原理。设只去 A 景点的人数有 x 人, 只去景点 B 的人数为 y 人, 去了两个景点的为 z 人。根据题意可得:
$$\begin{cases} x=y \\ x+y=3z \end{cases}$$
, 进而得出 $z=2x/3$, 只去过一个景点的为 $2x$, 总人数为 $x+y+z=8/3x$, 所占比重为 $3/4$ 。因此, 答案选择 B 选项。

4. A 【解析】本题考查容斥原理。设同时报乙、丙两职位的人数为 x 人, 则根据容斥原理公式, $42=22+16+25-8-6-x+0$, 得到 $x=7$ 。因此, 答案选择 A 选项。

第二十三计 ★★★★★ 排列组合

 黄金法则

分类用加法原理,分步用乘法原理;考虑顺序用排列,不考虑顺序用组合。

 破解密钥

分类是指对完成一件事,需要划分几个类别,各类别内方法可以独立完成该事;

分步是指对完成一件事,需要分为几个步骤,每个步骤内的方法只能保证完成该步。

逆向计算:正面情况较多的排列组合,反面情况往往较少,则只需用总数减去反面情况数即可。

加法原理:

分类完成的事件,完成该事件的各类别方法总数相加。

乘法原理:

分步完成的事件,将完成该事件的各步骤的方法直接相乘。

排列公式:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-m+1)$$

组合公式:

$$C_n^m = C_n^{n-m} = \frac{n!}{m! (n-m)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-m+1)}{m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times 1}$$

环形排列:

n 个人排成一圈,有 $(A_n^n \div n)$ 种排法; n 个珍珠串成一条项链,有 $(A_n^n \div 2n)$ 种串法

错位排列:

有 n 封信和 n 个信封,每封信都不能装在自己的信封里,可能的方法的种数记作 D_n , 则, $D_1=0, D_2=1, D_3=2, D_4=9, D_5=44$

魔力四射

【例 1】(2003 年上海)某小组有四位男性和两位女性,六人围成一圈跳集体舞,不同的排列方法有 () 种。

- A. 720 B. 60 C. 480 D. 120

【解析】本题考查环形排列问题。六个人全排列的方式 = A_6^6 种方式,围成一圈,重复剔除,排列方式 = $A_6^6 \div 6 = 120$ (种)。因此,答案选择 D 选项。

【例 2】(2011 年国考)甲、乙两个科室各有 4 名职员,且都是男女各半。现从两个科室中选出 4 人参加培训,要求女职员比重不得低于一半,且每个科室至少选一人。问有多少种不同的选法? ()

- A. 67 B. 63 C. 53 D. 51

【解析】本题考查组合问题。可分类考虑:(1)4 女 0 男:1 种;(2)3 女 1 男: $C_4^3 \times C_4^1 = 16$ (种);(3)2 女 2 男: $C_4^2 \times C_4^2 = 36$ (种),排除均来自同一个科室选的 2 种情况,共有 $36 - 2 = 34$ (种)。一共有 $1 + 16 + 34 = 51$ (种)选法。因此,答案选择 D 选项。

【例 3】(2011 年浙江)4 位厨师聚餐时各做了一道拿手菜,现在要求每人各品尝一道菜,但不能尝自己做的那道菜,问共有几种不同的尝法? ()

- A. 6 种 B. 9 种 C. 12 种 D. 15 种

【解析】本题属于错位重排问题,四个元素错位重排对应的方法数为 9 种。因此,答案选择 B 选项。

【例 4】(2010 年北京)甲、乙两人从 5 项健身项目中各选 2 项,则甲、乙所选的健身项目中至少有 1 项不相同的选法共有 ()。

- A. 36 种 B. 81 种 C. 90 种 D. 100 种

【解析】本题应逆向考虑。甲、乙所选的健身项目全部选择情况有 $C_5^2 \times C_5^2 = 100$ (种),甲、乙所选的健身项目全部相同的情况数为 $C_5^2 = 10$ (种),则甲、乙所选的健身项目至少有 1 项不同的情况数为 $100 - 10 = 90$ (种)。因此,本题答案选择 C 选项。

 通关自测

【练习 1】两次掷一枚骰子，两次出现的数字之和为偶数的情况有()种。

- A. 18 B. 16 C. 12 D. 10

【练习 2】某班同学要订 A、B、C、D 四种学习报，每人至少订一种，最多订四种，那么每个同学有多少种不同的订报方式？()

- A. 7 种 B. 12 种 C. 15 种 D. 21 种

【练习 3】某铁路线上有 25 个大小车站，那么应该为这条路线准备多少种不同的车票？()

- A. 500 B. 600 C. 400 D. 450

【练习 4】大学生小陈和小姜想从 4 门课程中各选修 2 门，则小陈和小姜所选课程中恰好有 1 门相同的选法共有()种。

- A. 12 B. 24 C. 48 D. 96

 自测答案

1. A 【解析】两次掷骰子，第一次任意选，有 6 种选法；第二次必须跟第一次奇偶性相同，有 3 种选法，则数字之和为偶数的情况有 $6 \times 3 = 18$ (种) 选法。因此，答案选择 A 选项。

2. C 【解析】本题属于分类讨论问题。由题意可知，每个同学可以选择订 1 种、2 种、3 种、4 种共 4 种可能，所以总的方法数为 $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$ (种)。因此，本题答案选择 C 选项。

3. B 【解析】任意两站之间必须准备一张车票，且两站有前后顺序不同，所以是排列问题。总的方法数为 $A_{25}^2 = 600$ (种)。因此，本题答案选择 B 选项。

4. B 【解析】本题可逆向推导，两人所有选课的情况有 $C_4^2 \times C_4^2 = 36$ (种)，两人选课完全相同的情况有 $C_4^2 = 6$ (种)，完全不同的情况有 $C_4^1 C_3^1 = 6$ (种)，所以两人所选课程恰有 1 门相同的情况有 $36 - 6 - 6 = 24$ (种)。因此，本题答案选择 B 选项。

第二十四计 ★★★捆绑插空

黄金法则

相邻问题考虑捆绑法,不相邻问题考虑插空法。

破解密钥

题干表述为某两个或 n 个物体相邻或不相邻,这样的排列组合题目一般要使用捆绑与插空法。

捆绑法

相邻问题:先将相邻元素视作一个整体参与排序,然后再单独考虑这个整体内部各元素间的顺序。如:6个人站成一排,要求甲、乙必须相邻,则一共有()种排法。

【解析】把甲、乙看作一整体,和剩余的4人进行全排列,共 A_5^5 种方式;另外,甲乙排列有 A_2^2 种方式,那么共有 $A_5^5 \times A_2^2 = 240$ (种)排法。

魔力四射

【例1】(2012年上海)某市至旱季,水源不足,自来水公司计划在下周七天内选择两天停止供水,若要求停水的两天不相连,则自来水公司共有()种停水方案。

A. 21

B. 19

C. 15

D. 6

【解析】本题考查插空法。根据“停水的两天不相连”确定使用插空法。先把正常供水的5天选出,得到6个空,再将停水的两天“插空”,共 $C_6^2 = 15$ (种)方案。因此,答案选择C选项。

插空法

不相邻问题:先考虑剩余元素,然后将不相邻元素插入所成间隙之中。如:6个人站成一排,要求甲、乙必须不相邻,则一共有()种排法。

【解析】除甲、乙外,剩余的4人的全排列方式有 A_4^4 种,再把甲、乙两人插到4个人产生的5个空中(包括两端),有 A_5^2 种方式,那么共有 $A_4^4 \times A_5^2 = 480$ (种)排法。

【例 2】(2012 年广东)某市举办经济建设成就展,计划在六月上旬组织 5 个单位参观,其中一个单位由于人数较多,需要连续参观 2 天,其他 4 个单位只需要参观 1 天,若每天只能安排一个单位参观,则参观的时间安排有多少种?()

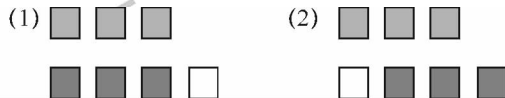
- A. 630 B. 700 C. 15120 D. 16800

【解析】本题考查排列组合。六月上旬共 10 天,将“连续参观 2 天”捆绑为 1 天,则题目可转化为“9 天安排 5 单位来参观,每天安排 1 个单位”,因此方法共 $A_9^5 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$ (种)方式。因此,答案选择 C 选项。

【例 3】(2012 年河南选调)有两个三口之家一起出行去旅游,他们被安排坐在两排相对的座位上,其中一排有 3 个座位,另一排有 4 个座位。如果同一个家庭的成员只能被安排在同一排座位相邻而坐,那么共有多少种不同的安排方法?()

- A. 36 B. 72 C. 144 D. 288

【解析】本题考查排列组合。可以画出座位的图有如下两种情况:



每个座位图有两排座位,每个家庭有 3 口人,因此每种情况分别是 $A_2^2 \times A_3^3 \times A_3^3 = 72$ 种排列;两种座位一共有 $72 \times 2 = 144$ 种排列。因此,答案选择 C 选项。

【例 4】(2012 山西党群)一张节目表上原有 4 个节目,如果要保持这 4 个节目的相对不变,再添进去 2 个新节目,有()种安排方法。

- A. 15 B. 20 C. 25 D. 30

【解析】本题考查排列组合。4 个节目产生 5 个空,将第一个节目插到空中有 5 种方式,5 个节目产生 6 个空,将第二个节目插到空中有 6 种方式,分两步完成,总的安排方法有 $5 \times 6 = 30$ 种。因此,答案选择 D 选项。




通关自测

【练习 1】有 n 件不同的产品排成一排,若其中 A 、 B 两件产品排在一起的不同方法共有 48 种,则 n 的值为()。

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

【练习 2】一张节目表上原有 3 个节目,如果保持这 3 个节目的相对顺序不变,再添加进去 2 个新节目,有多少种安排方法?()

- A. 20 B. 12 C. 6 D. 4


自测答案

1. B 【解析】本题考查排列组合。将 A 、 B 两件捆绑在一起,则总的排列方式有 $(n-1)! \times 2 = 48$,解得 $n=5$ 。因此,答案选择 B 选项。

2. A 【解析】本题考查排列组合。3 个节目共产生 4 个空,将其中 1 个节目插进去有 4 种方式,此时产生 5 个空,再将另一个节目插进去,共 5 种方式,则一共有 $4 \times 5 = 20$ (种)。因此,答案选择 A 选项。

第二十五计 ★★★★★ 抽屉原理

黄金法则

最不利原则：考虑对于需要满足条件的“最不利”情形，结果为“最不利+1”。

破解密钥

在题干中出现“至少……，才能保证……”等信息时，一般考虑运用抽屉原理解题。突破点在于构造最不利情况，使目标事件最晚发生。

抽屉原理：

1. 将多于 n 件的物品放入 n 个抽屉中，那么其中至少有一个抽屉中的物品件数不少于 2。
2. 将多于 $m \times n$ 件的物品放入 n 个抽屉中，那么其中至少有一个抽屉中的物品件数不少于 $m+1$ 。

反向构造：

假设所有的物品都在自己的手中，然后逐一发出，在发出的过程中尽可能不要满足题目的目标，直到满足目标事件为止。

魔力四射

【例 1】(2012 年国考) 有 300 名求职者参加高端人才专场招聘会，其中软件设计类、市场营销类、财务管理类和人力资源管理类分别有 100、80、70 和 50 人。问至少有多少人找到工作，才能保证一定有 70 名找到工作的人专业相同？()

- A. 71 B. 119 C. 258 D. 277

【解析】本题考查抽屉原理。“要保证一定有 70 名找到工作的人专业相同”，最不利的情形是“每个专业找到工作的人最多有 69 人”，即软件设计类 69 人、市场营销类 69 人，财务管理类 69 人，人力资源管理类 50 人，之后任意一人找到工作，就一定能保证有 70 名找到工作的人专业相同，答案为 69+

$69+69+50+1=258$ (人)。因此,答案选择 C 选项。

【例 2】(2012 年浙江)有编号为 1—13 的卡片,每个编号有 4 张,共 52 张卡片。问至少摸出多少张,就可保证一定有 3 张卡片编号相连? ()

- A. 27 张 B. 29 张 C. 33 张 D. 37 张

【解析】本题考查抽屉原理。要求“保证 3 张卡片编号相连”,最不利情形是“只有 2 张卡片编号相连”,比如抽中所有(1,2,4,5,7,8,10,11,13)或者(1,3,4,6,7,9,10,12,13)这样 9 个数字,一共可以抽到 $4 \times 9 = 36$ (张)牌,答案 $36+1=37$ (张)。因此,答案选择 D 选项。

【例 3】(2012 年深圳事业单位)有形状、大小、材料完全相同的黑筷、白筷、红筷各 4 双,混杂在一起,要求闭着眼睛,保证从中摸出不同颜色的 2 双筷子,则至少要摸出()根。

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

【解析】本题考查抽屉原理。考虑最不利的情形,是一种颜色的筷子摸出 8 根,其他两种颜色每种摸出 1 根,仍然不能凑成不同颜色的 2 双筷子,这时候只要再摸出一根,就能保证有两双不同颜色的筷子。因此至少要摸出 $8+2+1=11$ (根)筷子,才能保证摸出不同颜色的 2 双筷子,因此答案选择 D 选项。

通关自测

【练习 1】调研人员在一次市场调查活动中收回了 435 份调查问卷,其中 80% 的调查问卷上填写了被调查者的手机号码。那么调研人员至少需要从这些调查表中随机抽出多少份,才能保证一定能找到两个手机号码后两位相同的被调查者? ()

- A. 101 B. 175 C. 188 D. 200

【练习 2】某中学初二年级共有 620 名学生参加期中考试,其中语文及格的有 580 名,数学及格的有 575 名,英语及格的有 604 名,以上三门功课都及格的至少有多少名同学? ()

- A. 575 B. 558 C. 532 D. 519

【练习 3】有 20 位运动员参加长跑,他们的参赛号码分别是 1,2,3,⋯,20,至少要从中选出多少个参赛号码,才能保证至少有两个号码的差是 13 的倍数? ()

A. 12

B. 15

C. 14

D. 13

 自测答案

1. C 【解析】分两步考虑最不利原则。首先假设最不利情形之一,抽取的恰好全部是 20% 未填手机号码的问卷,共有 $435 \times 20\% = 87$ (份);接着考虑最不利情形之二,再次抽取的手机号码后两位全不同,这类情形有 $10 \times 10 = 100$ 种。此时,再抽取 1 份,就能保证一定能找到两个手机号码后两位相同的调查报告,故至少需要抽取 $87 + 100 + 1 = 188$ (份)。因此,本题答案选择 C 选项。

2. D 【解析】要使三门功课都及格的人数最少,则需要不及格的人每人都只有一门不及格,语文不及格的人数为 $620 - 580 = 40$ (人),数学不及格的人数为 $620 - 575 = 45$ (人),英语不及格的人数为 $620 - 604 = 16$ (人),因此,不及格的人数最多为 $40 + 45 + 16 = 101$ (人),三门功课都及格的人数至少为 $620 - 101 = 519$ (人)。因此,本题答案选择 D 选项。

3. C 【解析】本题考查抽屉原理,由最不利原则,选出的前 13 个数是从 1 号到 13 号,之后再任意选 1 个数,就可保证至少有两个号码的差是 13 的倍数,即至少要选出 14 个号码。因此,本题答案选择 C 选项。



丢番图的墓志铭

古希腊数学家丢番图的墓碑上刻着一首诗,既代表他的生平,又是对他最好的纪念。

“墓中长眠着一位伟大的人物——丢番图,他一生的六分之一时光,是童年时代;又度过了十二分之一岁月后,他满脸长出了胡须;再过了七分之一年月时,举行了花烛盛典;婚后五年得一贵子;可是不幸的孩子,他仅仅活了父亲的半生时光,就离开了人间;从此作为父亲的丢番图,在悲伤中度过了四年后,结束了自己的一生。”

丢番图活了多少岁?



第二十六计 ★★★构造设定

黄金法则

总量一定,一个量要想最多(最少),则其他量最少(最多),这就是极端思想。

破解密钥

题干中出现“最少的……最多”“最多的……最少”、“最轻的……最重”、“排名第……最多(最少)”等字眼时,可根据题意,利用极端思想构造数列求解。

最少的……最多

从蓟县采摘回来,给同部门的 5 位同事捎来 21 个苹果,如果每个人分配的苹果不一样,问分得最多的那位同事至少能分得多少个?

【解析】“最多的同事最少”意味着其他人要最多,如果假设最多的最少为 x ,同时考虑到每个人的苹果数不同,那么其他人最多也就是比第一名少 1、2、3、4,进而可以得到下表:

第一	第二	第三	第四	第五
x	$x-1$	$x-2$	$x-3$	$x-4$

魔力四射

【例 1】(2012 年河北)要把 21 棵桃树栽到街心公园里 5 处面积不同的草坪上,如果要求每块草坪必须有树且所栽棵数要依据面积大小各不相同,面积最大的草坪上至少要栽几棵? ()

排名第……最……

从蓟县采摘回来,给同部门的 5 位同事捎来 21 个苹果,如果每个人分配的苹果不一样,问分得第二多的那位同事最多能分得多少个?

【解析】“第二多的最多”意味着其他人要最少,如果假设第二多的最多为 x ,同时考虑到每个人的苹果数不同,那么第一最少为 $(x+1)$,其他人最少为 1、2、3,进而可以得到下表:

第一	第二	第三	第四	第五
$x+1$	x	3	2	1

A. 7 B. 8 C. 10 D. 11

【解析】 本题考查构造问题。要使面积最大的草坪栽种的树最少,就要保证其他的草坪栽种的树最多,设面积最大的草坪至少栽种 x 棵,则其他的草坪可栽种 $x-1, x-2, x-3, x-4$ 棵,则 $x+x-1+x-2+x-3+x-4 \geq 21$, 解得 $x \geq 6.2, x=7$ 。因此,答案选择 A 选项。

【例 2】 (2011 年北京) 为增强职工的锻炼意识,某单位举行了踢毽子比赛,比赛时长为 1 分钟。参加比赛的职工平均每人踢了 76 个,已知每人至少踢了 70 个,并且其中一人踢了 88 个,如果不把该职工计算在内,那么平均每人踢了 74 个。则踢得最快的职工最多踢了多少个? ()

A. 88 B. 90 C. 92 D. 94

【解析】 本题考查数列构造问题。设员工人数为 x , 根据踢毽子总数目相等可得: $76x = 74(x-1) + 88$, 解得 $x = 7$ (人)。要使踢得最快的职工尽可能踢得多,就要构造其他人尽可能少,除了最快的职工还有踢了 88 个的职工,我们设定剩下 5 名职工都只踢了 70 个,这样踢得最快的职工应该是踢了 $74 \times 6 - 70 \times 5 = 94$ (个)。因此,答案选择 D 选项。

【例 3】 (2010 年国考) 某机关 20 人参加百分制的普法考试,及格线为 60 分,20 人的平均成绩为 88 分,及格率为 95%。所有人得分均为整数,且彼此得分不同。问成绩排名第十的人最低考了多少分? ()

A. 89 B. 88 C. 91 D. 90

【解析】 本题考查构造问题。不及格的人数 $= 20 \times 5\% = 1$, 20 人共失分 $= (100 - 88) \times 20 = 240$, 要使第十名得分最低,则要保证其他人得分最高,即失分最少,最后一名最高 59 分,失分 41 分。则 1 到 9 名分别失分 $0, 1, \dots, 8$ 分, 设第 10 名、第 11 名……第 19 名分别失分 $x, x+1, x+2, \dots, x+9$, 则可得 $(0+1+\dots+8) + [x+(x+1)+(x+2)+\dots+(x+9)] + 41 \leq 240$, 解得 x 最大为 11, 即第 10 名最少得分 89 分。因此,答案选择 A 选项。

通关自测

【练习 1】 5 人的体重之和是 423 斤, 他们的体重都是整数, 并且各不相同, 则体重最轻的人, 最重可能重 ()。



A. 80斤 B. 82斤 C. 84斤 D. 86斤

【练习2】100人参加7项活动,已知每个人只参加一项活动,而且每项活动参加的人数都不一样。那么,参加人数第四多的活动最多有几人参加? ()

A. 21 B. 22 C. 23 D. 24

自测答案

1. B 【解析】本题考查构造问题,若要保证体重最轻的人最重,就要保证其他人的体重尽可能轻,设体重最轻的人的重量为 x ,则其余4人的体重分别为 $x+1, x+2, x+3, x+4$,根据题意, $x+x+1+x+2+x+3+x+4 \leq 423$,解得 $x \leq 82.6$,则最重为82斤。因此,答案选择B选项。

2. B 【解析】本题考查构造问题。要保证第四多的人最多,就要使其他名次的人尽可能少,设第四多的人数为 x ,则排名5到7的活动参加人数分别为3,2,1,排名1到3的参加人数分别为 $x+3, x+2, x+1$,根据题意, $3+2+1+x+x+3+x+2+x+1 \leq 100$,解得 $x=22$ 。因此,答案选择B选项。

第二十七计 ★★★三边关系

黄金法则

- (1) 在三角形中, 两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边。
 (2) 在任何一个直角三角形中, 两条直角边的平方和一定等于斜边的平方。

破解密钥

- (1) 题干中涉及构成三角形的三边长度时, 一定考查三角形的边长条件。
 (2) 直角三角形中, 经常考查常用的勾股数。

特殊勾股数

勾股数	直角边	3	5	6	7	8	9
	直角边	4	12	8	24	15	12
	斜边	5	13	10	25	17	15

斜边中线定理:

直角三角形斜边的中线等于斜边的一半。

注: 三角形三边长度关系的题目, 经常考查分类的解题思想。

魔力四射

【例 1】(2012 年河北) 一直角三角形的两直角边的长度之和为 14, 假如这个三角形的周长与面积数值相等, 那么该三角形的面积为()。

- A. 20 B. 22.5 C. 24 D. 24.5

【解析】本题考查平面几何问题。根据特殊勾股数, $6+8=14$, 面积 $=6 \times 8 \div 2=24$, 周长 $=6+8+10=24$, 符合题意。因此, 答案选择 C 选项。

【例 2】(2010 年江苏 C) 已知一个直角三角形的一个直角边为 12, 且周长比面积小 18, 则该三角形的面积是()。



A. 20 B. 36 C. 54 D. 96

【解析】 本题考查平面几何问题。“特殊勾股数”当中,有一个直角边为 12 的一共有(9、12、15), (5、12、13)。而 $9 \times 12 \div 2 - (9+12+15) = 54 - 36 = 18$, 满足条件, 面积为 54。而另一组不满足条件。因此, 答案选择 C 选项。

【例 3】 (2009 年浙江) 有一批长度分别为 3、4、5、6 和 7 厘米的细木条, 它们的数量足够多, 从中适当选取 3 根木条作为三角形的三条边, 可能围成多少个不同的三角形? ()

A. 25 个 B. 28 个 C. 30 个 D. 32 个

【解析】 本题考查三边关系。分类统计:

(1) 等边三角形: 5 个。(2) 两边相等三角形: $A_3^2 - 2 = 18$ (个)。(注意 3 与 6、7 的搭配, 不能构成两条 3 厘米的边)(3) 三边不等三角形: $C_3^5 - 1 = 9$ (个)(注意: 3、4、7 不能构成三角形)。以上合计 32 个。因此, 答案选择 D 选项。

通关自测

【练习 1】 一直角三角形最长边是 10 厘米, 最短边是 6 厘米, 则这个三角形的面积是() 平方厘米。

A. 24 B. 30 C. 48 D. 60

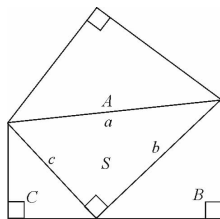
【练习 2】 一个等腰三角形, 两边长分别为 5 厘米、2 厘米, 则周长为多少厘米? ()

A. 12 B. 9 C. 12 或 9 D. 无法确定

【练习 3】 某厂生产一批商标, 形状为等边三角形或等腰三角形。已知这批商标边长为 2cm 或 4cm, 那么这批商标的周长可能是()。

A. 6cm 12cm B. 6cm 8cm 12cm
C. 6cm 10cm 12cm D. 6cm 8cm 10cm 12cm

【练习 4】 如图所示, A、B、C 是三个等腰直角三角形, 其中 A 的面积大于 B 的面积、B 的面积大于 C 的面积, 它们的三条斜边 a、b、c 恰好构成一个直角三角形 S。已知 a 为定值, 下列推论正确的是()。



- A. S 的周长为定值
 B. S 的面积为定值
 C. A、B、C 面积之和为定值
 D. B、C 面积之和大于 A 面积

自测答案

1. A **【解析】** 本题考查三边关系。根据特殊勾股数,10、8、6 正好与题意相符。则三角形面积 = $8 \times 6 \div 2 = 24$ (平方厘米)。因此,答案选择 A 选项。
2. A **【解析】** 本题考查三边关系。腰长可能为 2 或 5,当腰长为 5 时,周长 = $5 + 5 + 2 = 12$ cm;当腰长为 2 时,2、2、5 不能构成三角形,则周长只能为 12 (cm)。因此,答案选择 A 选项。
3. C **【解析】** 本题考查三边关系。三角形的三边可能有三种情况,(2,2,2),(4,4,4),(4,4,2),其周长为 6cm,12cm,10cm。因此,答案选 C 选项。
4. C **【解析】** 本题考查三边关系。在三角形 S 中,由勾股定理可得, $a^2 = b^2 + c^2$ 。三角形 A、B、C 的面积分别为 $\frac{1}{4}a^2$ 、 $\frac{1}{4}b^2$ 、 $\frac{1}{4}c^2$,a 为定值,从而三个直角形的面积和为定值。因此,答案选 C 选项。

第二十八计 ★★几何面积

黄金法则

面积一定,越接近于圆,则周长越小;周长一定,越接近于圆,面积越大。

破解密钥

规则图形,直接使用公式法进行求解。

不规则图形,则通过割补或平移变为规则图形,进而通过面积公式进行求解。

长方形面积:

$$S = a \times b$$

平行四边形面积:

$$S = a \times h (\text{底} \times \text{高})$$

梯形面积:

$$S = \frac{1}{2} (a + b) \times h$$

等边三角形面积:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

圆柱体表面积:

$$S = 2\pi r l + 2\pi r^2$$

正方形面积:

$$S = a^2$$

圆形面积:

$$S = \pi r^2$$

三角形面积:

$$S = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} ab \sin C$$

球表面积:

$$S = 4\pi R^2$$

长方体表面积:

$$S = 2ab + 2ac + 2bc$$

几何图形的等比放缩:

若一个几何图形尺度变为原来的 m 倍,则长度变为原来的 m 倍,面积变为原来的 m^2 倍,体积变为原来的 m^3 倍。

魔力四射

【例 1】(2007 年国考) 现有边长 1 米的一个木质正方体, 已知将其放入水里, 将有 0.6 米浸入水中, 如果将其分割成边长 0.25 米的小正方体, 并将所有的小正方体都放入水中, 直接和水接触的表面积总量为()。

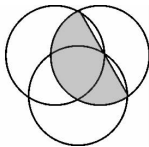
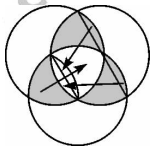
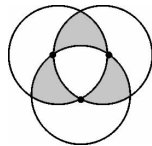
- A. 3.4 平方米 B. 9.6 平方米 C. 13.6 平方米 D. 16 平方米

【解析】 本题考查几何面积。一个大正方体变成了 $4^3=64$ 个小正方体, 每个小正方体的表面积变成原来的 $(1/4)^2=1/16$, 总表面积变为原来的 $64 \times (1/16)=4$ 倍, 与水接触部分的面积也增长为原来的 4 倍。原正方体与水面接触部分的面积为 $1^2+0.6 \times 1 \times 4=3.4$ (平方米), 因此所有小正方体直接和水接触的表面积为 $3.4 \times 4=13.6$ (平方米)。因此, 答案选择 C 选项。

【例 2】(2007 年河南) 三个圆的半径都是 5cm, 三个圆两两相交于圆心。则阴影部分的面积之和为()。

- A. 29.25cm^2 B. 33.25cm^2 C. 35.35cm^2 D. 39.25cm^2

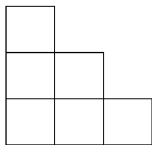
【解析】 本题考查几何面积。可采用割补法, 如左图的方式进行割补, 可得到阴影部分的面积如右图所示, 相当于一个半圆的面积, 所以阴影部分的面积为 $\frac{1}{2} \times 3.14 \times 5^2=39.25$ (平方厘米)。因此, 答案选择 D 选项。



【例 3】(2012 年山东)木工师傅为如图所示的 3 层模具刷漆,每层模具分别由 1、3、6 个棱长 1 米的正方体组成。如果用一公斤漆可以刷 20 平方米的面积。那么为这个 3 层模具的所有外表面上色,需要几公斤漆? ()

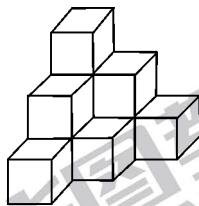
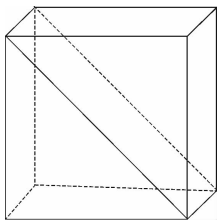
- A. 1.8 B. 1.6 C. 1.5 D. 1.2

【解析】分析可知,模具由 3 个看不见的平面(左侧面、右侧面、底面)和可视面组成。每个平面有 6 个小正方形,如下:



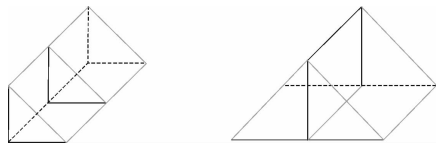
在面对我们的这个面中,每个小立方体都有 3 个面需要油漆。因此,这个大面共有 3×6 (个)小正方形,一共有 $6 \times 3 + 3 \times 6 = 36$ (个)面积为 1 平方米的小正方形。因此共需 $36 \div 20 = 1.8$ (公斤)的油漆。因此,答案选择 A 选项。

【例 4】(2012 年广州)将一个表面积为 18 平方厘米的正方体沿对角线切成两块对称的三棱柱(见下图),并将这两块三棱柱重新拼接成一个大的三棱柱。则这个大三棱柱的表面积最大为()平方厘米。



- A. $12+2\sqrt{3}$ B. $12+6\sqrt{2}$ C. $15+2\sqrt{3}$ D. $15+6\sqrt{2}$

【解析】本题考查几何面积计算。要使大三棱柱的表面积最大，则应使重合部分的表面积最小，即重合面为等腰直角三角形所在面。

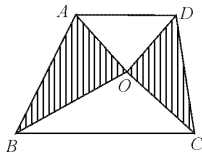


根据题意可得新的三棱柱表面积 $= 18 - 3 + 2 \times 3\sqrt{2} = 15 + 6\sqrt{2}$ 。因此，答案选 D 选项。

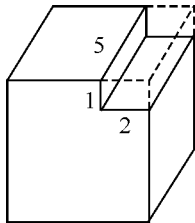
通关自测

【练习 1】如下图所示，梯形下底是上底的 1.5 倍，梯形中阴影面积等于空白面积，三角形 OBC 的面积是 12，那么三角形 AOD 的面积是（ ）。

- A. 8 B. 12
C. 16 D. 20

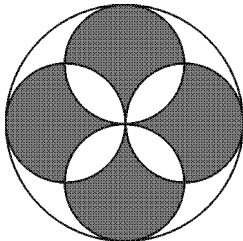


【练习 2】有一个棱长 5cm 的正方体，从它的右上方截去一个棱长分别为 5cm, 2cm, 1cm 的长方体，如下图。则剩下部分的表面积为多少平方厘米？（ ）



- A. 116 B. 133 C. 146 D. 150

【练习 3】在下图中,大圆的半径是 8,求阴影部分的面积是多少? ()



- A. 120 B. 128 C. 136 D. 144

【练习 4】一个长方形周长 130 厘米,如果它的宽增加 $\frac{1}{5}$,长减少 $\frac{1}{8}$,就得到一个相同周长的新长方形,则原长方形的面积为()平方厘米。

- A. 1000 B. 900 C. 850 D. 840

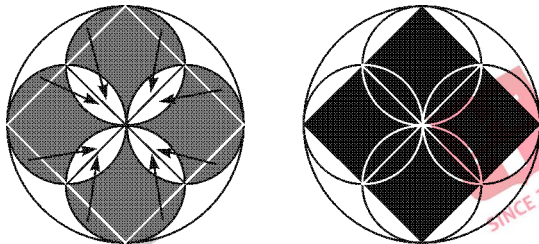
自测答案

1. A 【解析】本题属于几何问题。如题图,设梯形的高为 h , $\triangle AOD$ 的高是 h_1 , $\triangle BOC$ 的高是 h_2 。由题意空白面积 = $\frac{1}{2}$ 梯形面积 = $\frac{1}{2} \times (AD+BC) \times (h_1+h_2) \times \frac{1}{2} = (AD \times h_1 + BC \times h_2) \times \frac{1}{2}$, 可推出 $h_1 = h_2 = \frac{1}{2}h$ 。因此 $\triangle AOD$ 与 $\triangle BOC$ 的面积之比是 $AD : BC = 1 : 1.5$, $\triangle AOD$ 的面积是 $12 \times \frac{1}{1.5} = 8$ 。因此答案选择 A 选项。

2. C 【解析】从正方体上截去小长方体后,正方体的表面积减少了 4 个部分,增加了两个部分,并且新增的两部分的面积与截去长方形后侧面和顶面所减少的两个部分面积相等,剩余部分的表面积相当于原来正方体的表面积减去正面减少部分的面积的 2 倍,为 $6 \times 5 \times 5 - 2 \times 1 \times 2 = 146$ (平方厘米)

米)。因此,本题答案选择 C 选项。

3. B 【解析】本题可采用割补平移法,如左下图所示,将四个小圆与大圆的切点相连,即在大圆内部构成了一个正方形,采用如左下图的方式进行割补,可得阴影部分的面积如右下图所示,可将阴影部分的面积转为正方形的面积。大圆的半径是 8,则正方形对角线为 16,则正方形边长为 $8\sqrt{2}$,正方形面积为 128。因此,本题答案选择 B 选项。



4. A 【解析】本题考核几何问题。设长方形的原长为 $8x$, 宽为 $5y$, 则 $\begin{cases} 2(8x+5y)=130 \\ 8x+5y=7x+6y \end{cases}$, 解方程组可以得到 $x=y=5$, 进而可以得到原长方形的面积为 $8 \times 5 \times 5 \times 5 = 1000$ 。因此,答案选择 A 选项。

第二十九计 ★★★几何体积

黄金法则

体积一定的图形,越接近于球,则表面积越小;表面积一定的图形,越接近于球,则体积越大。

破解密钥

对于空间图形,我们可以运用公式法计算,有的题目可以将空间问题转化为平面问题,从而将问题进行简化。

长方体体积:

$$V = abc$$

球体体积:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

圆锥体体积(锥体体积):

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}S_{\text{底}} \cdot h$$

魔力四射

【例 1】(2012 年国考)连接正方体每个面的中心构成一个正八面体(如下图所示)。已知正方体的棱长为 6 厘米,问正八面体的体积为多少立方厘米?()

A. $18\sqrt{2}$

B. $24\sqrt{2}$

C. 36

D. 72

正方体体积:

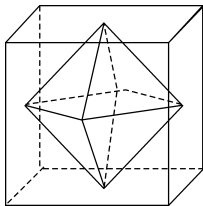
$$V = a^3$$

圆柱体体积:

$$V = \pi r^2 h$$

正四面体体积:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$



【解析】 本题考查立体几何体积。该正八面体可以看成两个四棱锥的组合，底面相当于正方体底面各边中点连线构成的正方形，面积为原来正方体底面积的一半。即 $S_{\text{四棱锥底面}} = 18$ (平方厘米)，高为 3 厘米，因此正八面体的体积为 $2 \times \frac{1}{3}Sh = 2 \times \frac{1}{3} \times 18 \times 3 = 36$ (立方厘米)。因此，答案选择 C 选项。

【例 2】 (2012 年江苏) 长方体的表面积是 88，其长、宽、高之比为 3 : 2 : 1，则长方体的体积是 ()。

- A. 45 B. 48 C. 384 D. 3072

【解析】 本题考查几何体积。假设长方体的长、宽、高分别为 $3n$ 、 $2n$ 、 n ，那么 $(3n \times 2n + 2n \times n + 3n \times n) \times 2 = 88$ ，解得 $n = 2$ ，则可以得到长方体的长、宽、高分别为 6、4、2，从而得到长方体的体积为 $6 \times 4 \times 2 = 48$ ，因此，答案选择 B 选项。

【例 3】 (2012 年浙江) 有一个长方体容器，长 40 厘米，宽 30 厘米，高 10 厘米，里面水深 6 厘米 (最大面为底面)。如果把这个容器盖紧，再竖起来 (最小面为底面)。里面的水深是多少厘米？ ()

- A. 15 厘米 B. 18 厘米 C. 24 厘米 D. 30 厘米

【解析】 本题考查几何体积。水的体积不变，原底面积 = 40×30 (平方厘米)，深 = 6 厘米，现在底面积 = 30×10 (平方厘米)，因此水深 = $\frac{40 \times 30 \times 6}{30 \times 10} = 24$ (厘米)。因此，答案选择 C 选项。

【例 4】 (2012 年天津) 某蔬菜种植基地有甲、乙两个圆柱形蓄水池，它们的底面积之比为 4 : 3，甲池中水深 8m，乙池中水深 5m，再往两个蓄水池注入同样多的水，直到两个蓄水池水深相等，则甲蓄水

池的水面上升()。

- A. 12m B. 18m C. 9m D. 6m

【解析】 本题考核几何体积计算。设注入同样多的水后,甲乙两个蓄水池的水深均为 x ,那么由注入的水量相等可得: $4(x-8)=3(x-5)$,解得 $x=17$ (米),那么甲蓄水池的水面上升了 $17-8=9$ (米)。

因此,答案选择 C 选项。

通关自测

【练习 1】 相同表面积的四面体、六面体、正十二面体及正二十面体,其中体积最大的是()。

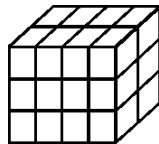
- A. 四面体 B. 六面体
C. 正十二面体 D. 正二十面体

【练习 2】 两个圆柱形水井,甲井的水深是乙井的一半,水面直径是乙井的 2 倍,蓄水量为 40 立方米,问乙井的蓄水量为多少立方米?()

- A. 20 B. 40 C. 60 D. 80

【练习 3】 一个正方体被切成 24 个小长方体(见下图),这些小长方体的表面积总和为 162 平方米。则这个正方体的体积为()立方米。

- A. $\frac{81}{4}$ B. 27 C. 36 D. $\frac{81}{2}$



【练习 4】 某公司要在长、宽、高分别为 50 米、40 米、30 米的长方体建筑的表面架设专用电路管道联接建筑物内最远两点,预设的最短管道长度介于()。

- A. 70—80 米之间 B. 60—70 米之间
C. 90—100 米之间 D. 80—90 米之间

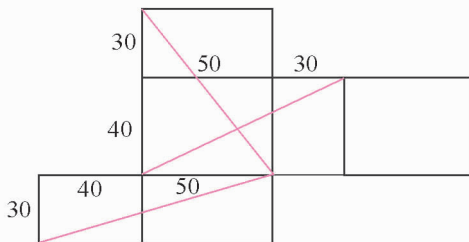
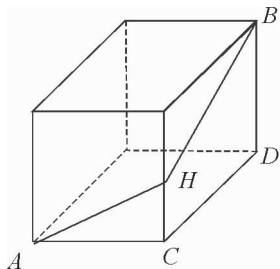
自测答案

1. D **【解析】** 表面积一定的图形,越接近于球,则体积越大。四个选项中,正二十面体最接近于球形,因此体积最大。因此,本题选择 D 选项。

2. A 【解析】本题属于几何问题。圆柱体的体积 $=\pi R^2 h$,根据题意,甲、乙两水井的半径之比为 $R_1 : R_2 = 2 : 1$,两井的高度为 $h_1 : h_2 = 1 : 2$,则体积之比为 $V_1 : V_2 = 2^2 \times 1 : 1^2 \times 2 = 2 : 1$ 。甲井的蓄水量为 40 立方米,则乙井的蓄水量为 20 立方米。因此,本题答案选择 A 选项。

3. B 【解析】设正方体的棱长为 x 米,则长方体的三棱长分别为 $\frac{x}{2}$ 、 $\frac{x}{3}$ 、 $\frac{x}{4}$ 米,则每个小长方体的表面积为 $2 \times \left(\frac{x}{2} \times \frac{x}{3} + \frac{x}{3} \times \frac{x}{4} + \frac{x}{2} \times \frac{x}{4} \right) = \frac{16x^2}{24}$ (平方米),可解得 $x=3$ 。故正方体的体积为 $3^3 = 27$ (立方米)。因此,本题答案选择 B 选项。

4. D 【解析】具体的图示分析如下:



如图最远的端点是 A、B 点,架设的管道在长方体的表面,拐点在长方体的棱上,拐点为 H,所求的是 $AH + HB$,已知两点之间直线最短,所以所求的应该是如图 $AB = AH + HB$, $AB = \sqrt{(AC + CD)^2 + DB^2}$,由于 $(AC + CD)$ 有可能是 70, 80 或者 90,对应的 CD 是 50, 40, 30,即为图中三条红线的长度,分别计算可得最小值为 $\sqrt{70^2 + 50^2} = \sqrt{7400} = 10\sqrt{74}$,即在 80 至 90 之间。因此,答案选择 D 选项。

第三十计 ★★★植树问题

黄金法则

植树问题是典型的几何边端问题,要牢记植树问题中的“±1关系”。

破解密钥

通过画图进行分析,明确“±1关系”是解答植树问题的关键。

单边线型植树公式:(两头植树)

棵数 = 总长 ÷ 间隔 + 1, 总长 = (棵数 - 1) × 间隔

变形题:等时间采样问题,等距离车站问题

单边环型植树公式:(环形植树)

棵数 = 总长 ÷ 间隔, 总长 = 棵数 × 间隔

单边楼间植树公式:(两头不植)

棵数 = 总长 ÷ 间隔 - 1, 总长 = (棵数 + 1) × 间隔

变形题:截管问题,爬楼梯问题

双边植树问题:

相对应单边植树问题所需棵数的 2 倍

魔力四射

【例 1】(2012 年北京)环保部门对一定时间内的河流水质进行采样,原计划每 41 分钟采样 1 次,但在实际采样过程中,第一次和最后一次采样的时间与原计划相同,每两次采样的间隔变成 20 分钟,采样次数比原计划增加了 1 倍。问实际采样次数是多少次? ()

A. 22

B. 32

C. 42

D. 52

【解析】 本题考查**单边线型植树问题**。采样时间由原来的 41 分钟变为 20 分钟,相当于植树问题中间距由 41 变为 20。设实际采样时间为 x 分钟,则原计划的采样次数为 $\frac{x}{41} + 1$,实际采样次数为 $\frac{x}{20} + 1$,因此可得 $(\frac{x}{41} + 1) \times 2 = \frac{x}{20} + 1$,解得 $x = 820$,因此实际采样次数为 $\frac{x}{20} + 1 = 42$ (次)。因此,答案选择 C 选项。

【例 2】(2010 年江西)从一楼走到五楼,爬完一层休息 30 秒,一共要 210 秒,那么从一楼走到七楼,需要多少秒?()

- A. 318 B. 294 C. 330 D. 360

【解析】 本题考查**单边楼间植树问题**。从一楼到五楼,需要爬楼梯 4 层,休息 3 次,则每爬一层需要 $(210 - 30 \times 3) \div 4 = 30$ (秒)。从一楼到七楼,需要爬楼梯层数为 6,需要休息 5 次,共需要时间 $30 \times 6 + 30 \times 5 = 330$ (秒)。因此,答案选择 C 选项。

【例 3】(2012 年河北事业单位)在一个长 60 米、宽 30 米的鱼塘四周种树,每个角各种一棵杨树,其余种柳树,每两棵树之间的距离是 3 米。一共种多少棵树?()

- A. 70 B. 60 C. 58 D. 56

【解析】 本题考查**环形植树问题**。**核心公式是:棵数 = 周长 ÷ 间隔**,根据题意一共可以种 $2 \times (60 + 30) \div 3 = 60$ (棵)。因此答案选择 B 选项。

【例 4】(2013 年北京)某条道路的一侧种植了 25 棵杨树,其中道路两端各种有一棵,且所有相邻的树距离相等。现在需要增种 10 棵树,且通过移动一部分树(不含首尾两棵)使所有相邻的树距离相等,则这 25 棵树中有多少棵不需要移动位置?()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【解析】 本题考查植树问题。第一次种树 25 棵,间隔的个数为 24,道路的长度是 24 的倍数,增种 10 棵树,树的总棵数为 35 棵,相当于间隔为 34 个,道路长度是 34 的倍数,赋值道路长度为 $2 \times 12 \times 17$ 米(24 与 34 的最小公倍数),原来间隔为 17 米,现在间隔为 12 米,两种种树的方式只有在 204 米(17

×12)处的一棵树正好重合,加上首尾两棵树,不需要移动位置的树是3棵。因此,答案选择A选项。

通关自测

【练习1】如图,街道XYZ在Y处拐弯, $XY=1125$ 米, $YZ=855$ 米,在街道一侧等距装路灯,要求X、Y、Z处各装一盏路灯,这条街道最少要安装多少盏路灯?()

- A. 47 B. 46 C. 45 D. 44

【练习2】把一根钢管锯成5段需要8分钟,如果把同样的钢管锯成20段需要多少分钟?()

- A. 32 B. 38 C. 40 D. 152

【练习3】正方形操场四周栽了一圈树,四个角上都栽了树,每两棵树相隔5米。甲、乙从一个角上同时出发,向不同的方向走去,甲的速度是乙的速度的2倍,乙在拐了一个弯之后的第5棵树与甲相遇(把角上的树看作第一棵树),操场的周长是多少米?()

- A. 48 B. 60 C. 300 D. 240

【练习4】某单位购买一批树苗计划在一段路两旁植树。若每隔5米种1棵树,可以覆盖整个路段,但这批树苗剩20棵。若每隔4米种1棵树且路尾最后两棵树之间的距离为3米,则这批树苗刚好可覆盖整个路段。这段路长为()。

- A. 195米 B. 205米 C. 375米 D. 395米

自测答案

1. C **【解析】**本题考查单边线型植树问题,棵数=段数+1。1125和855的最大公约数为45,则应安装路灯 $\frac{1125+855}{45}+1=45$ (盏)。因此,本题答案选择C选项。

2. B **【解析】**本题类似单边楼间植树问题。锯成5段只需要锯4次,即每次需要2分钟,而锯成20段需要锯19次,故所需的时间为 $19 \times 2 = 38$ (分)。因此,本题答案选择B选项。

3. D 【解析】甲的速度为乙的乙倍,乙在拐了一个弯的第 5 棵树,则甲应在拐了两个弯后的第 9 棵树,即乙拐弯后走了 4 个间隔,甲拐弯后走了 8 个间隔,操场一边计 12 个间隔,长度为 $12 \times 5 = 60$ (米),操场的周长为 $60 \times 4 = 240$ (米)。因此,答案选择 D 选项。

4. A 【解析】本题考查植树问题。

解法一:设共有树苗为 x 棵,这段路长为 y 米,则可以列如下方程:

$$\begin{cases} (\frac{y}{5} + 1) \times 2 = x - 20 \\ 2 \times (\frac{y+1}{4} + 1) = x \end{cases}$$

解得, $x = 100, y = 195$ 。

解法二:本题也可以利用整除特性求解,根据题干的第二句话,路的长度除以 4 余 3,据此排除 B 选项;然后再根据是两旁植树,排除答案 C、D(这两个选项过大,是单边植树而不是两旁植树的答案)。因此,答案选择 A 选项。



生日巧合

在一般人看来,一年有 365 天,两个人生日都要在这 365 天中的某一天,似乎是很凑巧的事。其实如果某团体有 40 人,至少有两人生日相同的可能性有 89%;如果团体有 45 人,至少有两人生日相同的可能性达到 94%;如果团体有 50 人,至少有两人生日相同的可能性达到 97% 之多。这是为什么呢?

第三十一计 ★★★方阵问题

黄金法则

相邻两层单边数量相差为 2, 相邻两层外层人数比内层人数多 8 人, 实心方阵总人数是平方数。

破解密钥

解决方阵问题, 首先要判断出方阵的类型, 弄清楚方阵中各量之间的关系, 根据不同类型选择相应的公式进行解题。

实心方阵:

N 排 N 列的方阵

$$\text{总人数} = N^2$$

$$\text{最外层人数} = 4N - 4$$

M 排 N 列的长方形

$$\text{总人数} = M \times N$$

$$\text{最外层人数} = 2M + 2N - 4$$

魔力四射

【例 1】(2011 年安徽) 某学校的全体学生刚好排成一个方阵, 最外层人数是 108 人, 则这个学校共有多少名学生? ()

A. 724 人

B. 744 人

C. 764 人

D. 784 人

【解析】本题考查方阵问题。最外层人数 108 人, 那么最外层每条边上有 $\frac{108}{4} + 1 = 28$ (人), 总人数为 $28 \times 28 = 784$ (人)。因此, 答案选择 D 选项。

空心方阵(中空方阵):

总人数 = 大实心方阵人数 - 小实心方阵人数
 $= (\text{最外层人数} + \text{最内层人数}) \times \text{层数} \div 2 = \text{中间层人数} \times \text{层数}$

$$\text{层数} = (\text{最外层人数} - \text{最内层人数}) \div 8 + 1$$

$$\text{中间层人数} = (\text{最外层人数} + \text{最内层人数}) \div 2$$

【例 2】(2009 年江苏)有一队士兵排成若干层的中空方阵,外层人数共有 60 人,中间一层共有 44 人,则该方阵士兵的总人数是()。

- A. 156 人 B. 210 人 C. 220 人 D. 280 人

【解析】本题考查方阵问题。

解法一:最内层人数为 $44 \times 2 - 60 = 28$,则空心方阵的层数为 $(60 - 28) \div 8 + 1 = 5$,方阵总人数为 $(60 + 28) \times 5 \div 2 = 220$ 。因此,答案选择 C 选项。

解法二:总人数 = 中间层人数 \times 层数 = $44 \times$ 层数,答案应为 44 的倍数,即 11 的倍数,只有 C 符合。因此,答案选择 C 选项。

【例 3】(2010 年安徽)一个正方形队列,如减少一行和一列会减少 19 人,原队列有几个人?()

- A. 81 B. 100 C. 121 D. 144

【解析】本题属于方阵问题。设原方阵有 n 行 n 列,则减少一行一列后变为 $(n-1)$ 行 $(n-1)$ 列,于是有 $n^2 - (n-1)^2 = 19$,解得 $n = 10$,因此原队列有 $10^2 = 100$ (人)。所以选择 B 选项。

【例 4】(2012 秋联考)用红、黄两色鲜花组成的实心方阵(所有花盆大小完全相同),最外层是红花,从外往内每层按红花、黄花相间摆放。如果最外层一圈的正方形有红花 44 盆,那么完成造型共需黄花()。

- A. 48 盆 B. 60 盆 C. 72 盆 D. 84 盆

【解析】本题考查方阵问题。在方阵中,相邻两圈之间相差 8,那么相邻两圈黄花之间的差为 16。题目中最外圈红花为 44(盆),则次外层黄花为 36(盆), $36 + 20 + 4 = 60$ (盆)。因此,答案选择 B 选项。

通关自测

【练习 1】若干学校联合进行团体操表演,参演学生组成一个方阵,已知方阵由外到内第二层有 104 人,则该方阵共有学生()人。

- A. 625 B. 841 C. 1024 D. 1369

【练习 2】有绿、白两种颜色且尺寸相同的正方形瓷砖共 400 块。将这些瓷砖铺在一块正方形的

地面上:最外面的一周用绿色瓷砖铺,从外往里数的第二周用白色的瓷砖铺,第三周用绿色瓷砖铺,第四周用白色瓷砖铺……这样依次交替铺下去,恰好将所有瓷砖用完。这块正方形地面上的绿色瓷砖共有()块。

- A. 180 B. 196 C. 210 D. 220

自测答案

1. B 【解析】方阵中最外层人数比相邻一层人数多8人,故最外层人数为 $104+8=112$ (人),则方阵的层数为 $112\div 4+1=29$,故方阵共有学生 $29\times 29=841$ (人)。因此,本题答案选择B选项。

2. D 【解析】本题考查方阵问题。根据 $N^2=400$ 可知,最外层有20块绿瓷砖,相邻两周绿瓷砖的边长数差4,则绿瓷砖的边长数分别为20、16、12、8、4,构成等差数列,绿瓷砖的总数目为 $(19\times 4+3\times 4)\times 5\div 2=220$ 。因此,答案选择D选项。



韩信点兵

我国汉代有位大将,名叫韩信。他每次集合部队,只要求部下先后按1-3、1-5、1-7报数,然后再报告一下各队每次报数的余数,他就知道到了多少人。他的这种巧妙算法,人们称为鬼谷算,也叫隔墙算,或称为韩信点兵,外国人还称它为“中国剩余定理”。到了明代,数学家程大位用诗歌概括了这一算法,他写道:

三人同行七十稀,五树梅花廿一枝,

七子团圆月正半,除百零五便得知。

这首诗的意思是:用3除所得的余数乘上70,加上用5除所得余数乘上21,再加上用7除所得的余数乘上15,结果大于105就减去105的倍数,这样就知道所求的数了。

第三十二计 ★★★ 过河爬井与空瓶换酒

 黄金法则

M 个人过河,船上能载 N 个人,需要 1 人划船,则共需过河 $\frac{M-1}{N-1}$ 次。

M 个空瓶换 1 瓶酒,相当于 $(M-1)$ 个空瓶可以喝到 1 瓶酒。

 破解密钥

在过河问题中,需要注意的是需要几人划船,是单程还是往返。

我们将“ M 个空瓶换 N 瓶酒”转化为“ $(M-N)$ 个空瓶换 N 个(无瓶)酒”来解题。

过河问题:

M 个人过河,船上能载 N 个人,需要 n 人划船,则共需过河 $\frac{M-n}{N-n}$ 次,且最后一次是单程运动,其他为往返运动。

空瓶换酒问题

若原有 M 瓶酒, N 个空瓶换 1 瓶酒,则新换瓶数 = $\frac{M}{N-1}$ (取整数)

变形题:青蛙爬井问题

井的深度为 M ,青蛙每天爬 N ,每次滑下 x ,则青蛙从井中跳出的天数为 $\frac{M-x}{N-x}$ 。

 魔力四射

【例 1】(2010 年重庆)一只青蛙从一个斜坡底部往岸上跳,斜坡长度 5 米,青蛙每次可跳出 0.5 米,下滑 0.3 米,则它需要几次才能跳上岸? ()

A. 23

B. 24

C. 25

D. 26

【解析】 本题考查青蛙爬井问题。根据公式, 所需次数 $= \frac{5-0.3}{0.5-0.3} = 23.5$, 故需要 24 次才能跳上岸。因此, 答案选择 B 选项。

【例 2】 (2011 年湖南) 有 36 名战士需要乘船过河, 现仅有一条小船, 每次只能载 6 人, 过一次河需要 5 分钟。则全体战士过河需要()。

- A. 55 分钟 B. 60 分钟 C. 65 分钟 D. 70 分钟

【解析】 本题考查过河问题。根据公式, 需要过河 $\frac{36-1}{6-1} = 7$ (次), 返回 6 次, 共 13 次, 用时 $13 \times 5 = 65$ (分)。因此, 答案选择 C 选项。

【例 3】 (2011 年河南) 5 个空瓶可以换 1 瓶汽水, 某班同学喝了 161 瓶汽水, 其中有一些是用喝剩下的空瓶换的, 那么他至少要买汽水()瓶。

- A. 129 B. 128 C. 127 D. 130

【解析】 本题考查空瓶换酒问题。假设至少买了 n 瓶汽水, 根据基本公式, 那么最终可以喝的汽水瓶数 $= n + \frac{n}{5-1} \geq 161$, 解得 $n \geq 128.5$, 则至少买 129 瓶。因此, 答案选择 A 选项。

【例 4】 (2012 年山西党群) 某旅游团有 37 名游客需要到河对岸去野营, 现仅有一条船, 每次最多载 7 人(其中需要 1 人划船), 过一次河需要 5 分钟, 如果 9 时整开始渡河, 游客全部渡到河对岸的时间最早是()。

- A. 9 点 45 分 B. 9 点 50 分 C. 9 点 55 分 D. 9 点 60 分

【解析】 本题考查过河问题。根据公式, 过河所需次数为 $\frac{37-1}{7-1} = 6$ (次), 其中最后 1 次是单程, 总时间为 $5 \times 2 \times 5 + 5 = 55$ (分钟)。因此, 答案选择 C 选项。

通关自测

【练习 1】 41 个学生要坐船过河, 渡口处只有一只能载 4 人的小船(无船工), 他们要全部渡过河

去,至少要使用这只小船渡河多少次? ()

- A. 23 B. 24 C. 27 D. 26

【练习 2】有一只青蛙在井底,每天上爬 10 米,又下滑 6 米,这口井深 20 米,这只青蛙爬出井口至少需要多少天? ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【练习 3】12 个啤酒空瓶可以免费换 1 瓶啤酒,现有 101 个啤酒空瓶,最多可以免费喝到的啤酒为()。

- A. 10 瓶 B. 11 瓶 C. 8 瓶 D. 9 瓶

【练习 4】单位组织 150 人到公园旅游,在公园的售货亭买饮料,每瓶 2 元。现售货亭在搞买五赠一活动,每人一瓶饮料,最少要花多少钱? ()

- A. 280 B. 270 C. 260 D. 250

自测答案

1. C 【解析】本题考查过河问题,根据公式,需要过河 $\frac{41-1}{4-1} = \frac{40}{3}$ (次),因此要把全部的学生渡过河,至少需要过河 14 次,返回 13 次,一共需要 27 次。因此,本题答案选择 C 选项。

2. C 【解析】本题考查青蛙爬井问题。根据公式,所需次数为 $\frac{20-6}{10-6} = \frac{14}{4} = 3.5$,故需要 4 次才能爬出井口。因此,答案选择 C 选项。

3. D 【解析】本题考查空瓶换酒问题。根据题意可知,12 个空瓶换一瓶酒,相当于 1 瓶酒等于一个空瓶加 1 酒,所以题意等价于 11 个空瓶换 1 酒, $101 \div 11 = 9 \dots 2$,即可换 9 瓶酒。因此,答案选择 D 选项。

4. D 【解析】本题考查趣味问题。分析题干可知,花 5 瓶饮料的钱可以买到 6 瓶饮料,所以可以将 150 人,按照 6 人一组进行购买, $150 \div 6 = 25$ 组,最少需要花的钱为 $25 \times 5 \times 2 = 250$ 元。因此,答案选择 D 选项。





二桃杀三士

齐景公养着三名勇士，他们名叫田开疆、公孙接和古冶子。这三名勇士都刚愎自用，目中无人，齐景公想杀掉他们，晏子献上一计：以齐景公的名义赏赐三名勇士两个桃子，让他们自己评功，按功劳的大小吃桃。

三名勇士都认为自己的功劳很大，公孙接首先讲了自己的打虎功，拿了一只桃；田开疆讲了自己的杀敌功，拿起了另一只桃。两人正要吃桃子，古冶子说出了自己更大的功劳。公孙接、田开疆都觉得自己功劳确实不如古冶子大，感到羞愧难当，赶忙让出桃子，并且觉得自己功劳不如人家，却抢着要吃桃子，实在丢人，是好汉就没有脸再活下去，于是都拔剑自刎了。古冶子见了，后悔不迭。仰天长叹道：“如果敢弄桃子而隐瞒功劳，则有失勇士尊严；为了维护自己而羞辱同伴，又有损哥们义气。如今两个伙伴都为此而死了，我独自活着，算什么勇士！”说罢，也拔剑自杀了。

事实上，晏子的权谋运用了一个重要的数学原理——抽屉原理。

第三十三计 ★★★对折与倍增

黄金法则

一根绳子对折 N 次, 剪 M 刀, 得到 $M \times 2^N + 1$ 段绳子。

破解密钥

对折和倍增在本质上都是等比数列的一种直接应用。

对折剪绳:

一根绳子连续对折 n 次, 中间剪 m 刀, 则绳子被剪成 $2^n \times m + 1$ 段。

将一根绳子剪 M 刀, 可得到 M 个断点, 绳子变为 $M+1$ 段; 绳子对折 N 次后, 绳子变为 2^N 层, 再剪 M 刀, 则可得到绳子有 $M \times 2^N$ 个断点, 得到 $M \times 2^N + 1$ 段绳子。

倍增计数:

如果一个量, 每个周期后变为原来的 A 倍, 那么 n 个周期后就是最开始的 A^n 倍, 1 个周期前应该是当时的 $\frac{1}{A}$ 。

【特征】每次变化总数为原来的某倍数特征, 求若干次变化后的信息, 倍数递增问题实质上是等比数列的一种实际应用。

魔力四射

【例 1】(2011 年 9 月联考) 一根绳子对折三次后, 从中剪断, 共剪成() 段绳子。

- A. 9 B. 6 C. 5 D. 3

【解析】本题考查对折绳问题。根据公式, 共剪成 $1 \times 2^3 + 1 = 9$ (段)。因此, 答案选择 A 选项。

【例 2】(2010 年上海) 有一科研机构培养一种细菌, 这种细菌 1 小时可以增长 1 倍, 若现在有一批这样的细菌, 8 小时可以增长到 600 万个, 则增长到 150 万个需要() 小时。

- A. 7 B. 6 C. 5 D. 4



【解析】 本题考查倍增问题。1小时可以增长1倍,那么1小时之前是现在的一半,2小时之前应该是现在的 $\frac{1}{4}$ 。8小时可以增长到600万个,那么2小时前为 $600 \times \frac{1}{4} = 150$ (万个),即细菌增长6小时的时候为150万个。因此,答案选择B选项。

通关自测

【练习1】 把一张足够大的且厚度为0.1毫米的纸连续对折。要使对折后的整叠纸总厚度超过12毫米,至少要对折几次?()

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

【练习2】 一根长200米的绳子对折四次后从中间剪断,最后绳子的段数为()。

- A. 9 B. 11 C. 17 D. 21

【练习3】 一只蚂蚁发现一个死螳螂,立刻回洞找来10只蚂蚁,搬不动,然后每只蚂蚁又回去各找10只蚂蚁,还是搬不动;每只蚂蚁又回去各找来10个伙伴,终于把死螳螂拖回洞里,问共有几只蚂蚁参与搬运?()

- A. 1210 B. 1257 C. 1331 D. 1441

自测答案

1. B **【解析】** 本题属于倍增问题,每叠一次,厚度翻一番。 $12 \div 0.1 = 120$,则 $2^6 < 120 < 2^7$,故要使整叠纸的总厚度超过12毫米,至少要对折7次。因此,本题答案选择B选项。

2. C **【解析】** 本题考查对折绳问题。根据公式,共剪成 $1 \times 2^4 + 1 = 17$ (段)。因此,答案选择C选项。

3. C **【解析】** 本题考查倍增问题。第一次1只蚂蚁变成11只,第二次同样每只蚂蚁变成11只,有 11^2 只,则第三次共有蚂蚁 $11^3 = 1331$ (只)。因此,本题答案选择C选项。

第三十四计 ★★★统计术语

术语(一):基期量与现期量、增长量与增长率

黄金法则

基期量 = 现期量 \div (1 + 增长率), 增长率 = 增长量 \div 基期量。

破解密钥

基期量的判定技巧有 2 个, 一是看时间关系, 按照先后原则, “先”一般为基期量, “后”一般为现期量。二是看概念描述, “A 比 B……中国比日本……”则“比”字后为基期量, 前为现期量。

基期和现期:

基期是统计中计算指数或变化情况 etc 动态指标时, 作为参照标准的时期, 现期是相对于基期而言的, 是与基期相比较的后一时期。例如, “与 2009 年相比, 2010 年的国民生产总值增长了 10.6%”, 其中 2009 年为基期, 2010 年为现期。

基期量和现期量:

基期量指的是描述基期的具体数值, 现期量是指描述现期的具体数值。例如, “2010 年, 某省广电实际总收入为 145.83 亿元, 比去年的 110.42 亿元增长了 35.41 亿元”, 其中 2009 年的总收入 110.42 亿元为基期量, 2010 年的总收入 145.83 亿元为现期量”。

增长量和增长率：

增长量是指现期量相对于基期量的绝对变化值，增长率是现期量相当于基期量的相对变化值，增长率等同于增幅、增速、增长速度。例如，“增长了 35.41 亿元，增长 32%”，35.41 亿元即为增长量，32% 即为增长率。

常用公式：

增长量 = 现期量 - 基期量 = 基期量 × 增长率

基期量 = 现期量 - 增长量 = 现期量 ÷ (1 + 增长率)

现期量 = 基期量 + 增长量 = 基期量 × (1 + 增长率)

增长率 = 增长量 ÷ 基期量 = (现期量 - 基期量) ÷ 基期量

魔力四射

【例 1】(2012 年国考)2010 年，某省广电实际总收入为 145.83 亿元，同比增长 32.07%。其中，有线网络收入为 45.38 亿元，同比增长 26.35%。2009 年，该省的有线网络收入约为多少亿元？()

- A. 21 B. 36 C. 57 D. 110

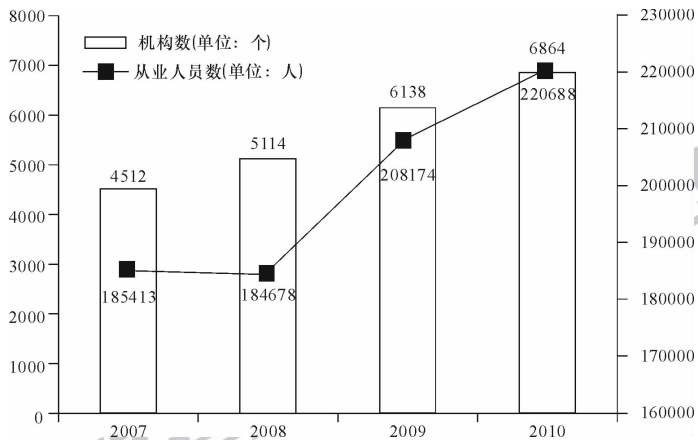
【解析】本题考查基期量的计算。已知 2010 年有线网络收入为 45.38 亿元，增长率为 26.35%，2009 年该省有线网络收入为 $\frac{45.38}{1+26.35\%} \approx \frac{45}{1.25} = 45 \times 0.8 = 36$ (亿元)。因此，本题答案选择 B 项。

【例 2】(2012 年国考)2010 年，该省广电收入中，地市级收入为 41.61 亿元，比上年增加 13.39 亿元。则 2010 年，该省地市级广电收入的同比增速约为()。

- A. 15% B. 20% C. 32% D. 47%

【解析】本题考查增长率的计算，2009 年该省地市级广电收入为 $41.61 - 13.39 = 28.22$ (亿元)，同比增速约为 $\frac{13.39}{28.22} \times 100\% > \frac{12}{30} \times 100\% = 40\%$ ，选项中只有 D 项满足。因此，本题答案选择 D 选项。

【例 3】



全国艺术表演团体结构与人员情况图

如果 2011 年从业人员人数的增长率与 2010 年相同,则 2011 年从业人员人数为()万。

- A. 22.8 B. 23.4 C. 24.9 D. 25.7

【解析】本题考查现期量计算。计算现期量的题型基本是预测下年量。本题标准列式为 $220683 \times \frac{220683}{208174}$,但这类题目往往依据“增长率不变,增长量在增大”这一基本原则进行简单估算,如本题答案略大于 $220683 + (220683 - 208174) = 233192$ 。因此,答案选择 B 选项。

【例 4】(2011 年春季联考)2010 年 1~3 月,法国货物贸易进出口总额为 2734.4 亿美元,同比增长 13.4%。其中,出口 1264.7 亿美元,同比增长 14.5%;进口 1469.7 亿美元,同比增长 12.4%;逆差

205.0 亿美元,同比增长 1.0%。

2010 年 1~3 月,法国货物贸易出口额比上年同期增长了约多少? ()

- A. 120 亿美元 B. 140 亿美元 C. 160 亿美元 D. 180 亿美元

【解析】 本题考查增长量计算。根据基本公式,增长量 = $\frac{1264.7}{1+14.5\%} \times 14.5\%$, 14.5 略大于 1/7, 所以增长量略大于 $1264.7 \div 8 = 158$ 。因此,答案选择 C 选项。

通关自测

【练习 1】 2011 年 8 月份,社会消费品零售总额 14705 亿元,同比增长 17.0%。其中,限额以上企业(单位)消费品零售额 6902 亿元,增长 22.1%。

2010 年 8 月限额以上企业(单位)消费品零售额达到多少亿元? ()

- A. 5440 B. 5653 C. 5734 D. 5968

【练习 2】 2011 年 A 市全年对美国出口 590 万美元,比上年下降 24%。2010 年 A 市对美国出口额约为()。

- A. 776 万美元 B. 732 万美元 C. 448 万美元 D. 484 万美元

【练习 3】

2010 年 1~4 月全国入境旅游部分市场客源情况统计表

按 1~4 月 入境旅游 人数排序	国家名称	4 月份		1~4 月累计	
		入境人数(万人)	同比增长(%)	入境人数(万人)	同比增长(%)
13	英国	5.03	-2.37	18.32	5.61
16	法国	4.44	6.80	15.11	15.40

若保持同比增长率不变,预计哪一年 4 月入境旅游的法国游客人数将会超过英国? ()

- A. 2011 B. 2012 C. 2013 D. 2014

【练习 4】2006 年至 2011 年全年我国农村居民人均纯收入分别为 3587 元、4140 元、4761 元、5153 元、5919 元、6977 元；城镇居民人均可支配收入分别为 11759 元、13786 元、15781 元、17175 元、19109 元、21810 元。

2011 年我国城镇居民人均可支配收入比 2008 年大约增加了()。

- A. 18% B. 38% C. 58% D. 85%

【练习 5】2010 年,我国粮食产量达到 54641 万吨,比 1978 年增长 79.3%。棉花产量 597 万吨,增长 1.8 倍。油料产量 3239 万吨,增长 5.2 倍。

2010 年的油料产量约比 1978 年增加了()。

- A. 2597 万吨 B. 2645 万吨 C. 2718 万吨 D. 2809 万吨

自测答案

1. B 【解析】本题考查基期量计算。根据基期量计算公式,可得 2010 年限额以上企业(单位)消费品零售额为 $6902 \div (1 + 22.1\%) \approx (6100 + 800) / 1.22 = 5600^+$ 。因此,答案选择 B 选项。

2. A 【解析】本题考查基期量计算。增长率为负,基期量大于现期量,排除 CD 选项。根据题干信息可得计算式为 $590 \div (1 - 24\%) \approx 590 \times 4/3 \approx 776$ 。因此,答案选择 A 选项。

3. B 【解析】本题考查现期量计算。2010 年 4 月英国的入境人数比法国多 $5.03 - 4.44 = 0.59$ 万人,英国 2011 年 4 月减少的入境人数为 $5.03 \times 2.37\% \approx 0.12$ 万人,法国 2011 年 4 月增加的人数为 $4.44 \times 6.8\% \approx 0.3$ 万人,即 2011 年 4 月会使得入境人数相差缩小 $0.3 + 0.12 = 0.42$ 万人,故而预计 2012 年 4 月法国会超过英国。因此,答案选择 B 选项。

4. B 【解析】本题考查增长率计算。根据增长率计算公式,结合题干中的数据信息,列式为 $(21810 - 15781) \div 15781 \approx 60 \div 158$,结果的商肯定是 3。因此,答案选择 B 选项。

5. C 【解析】本题考查增长量计算。根据增长量计算公式,结合题干数据信息,可得增长量为 $\frac{3239}{1+5.2} \times 5.2 = \frac{3239}{3.1} \times 2.6 = (1000 + \frac{139}{3.1}) \times 2.6 \approx 2718$ 。因此,答案选择 C 选项。

术语(二):同比和环比

黄金法则

同比是默认比,是指与上年同期相比;环比会明确告知,是指与上一个统计周期相比。

破解密钥

近几年的公考中,命题人会在概念上设置障碍项,一定要看清题干是同比还是环比。

同比增长:

指与上一年的同一时期相比的增长情况。

同比增长量=现期量-基期量

同比增长率=(现期量-基期量)÷基期量

三角上溯模型:

“2009年,某地区完成GDP共计8372亿元,同比增长8.2%,增长率提高了1.1个百分点……”通过这段描述,便可求得两年之前的2007年的数值:

2008年GDP为 $8372 \div (1 + 8.2\%)$,2008年GDP增长率为 $8.2\% - 1.1\% = 7.1\%$,2007年的GDP为 $[8372 \div (1 + 8.2\%)] \div (1 + 7.1\%)$ 。这样的模型称之为三角上溯模型。

环比增长:

是指与与之紧紧相连的上一个统计周期相比较的增长情况。

时间	2010年	2010年12月	2010年12月8日
同比增长	与2009年相比	与2009年12月相比	与2009年12月8日相比
环比增长	与2009年相比	与2010年11月相比	与2010年12月7日相比

魔力四射

【例1】(2010年浙江)经初步核算,2009年上半年我国国内生产总值同比增长7.1%,比一季度加快1.0个百分点……上半年,全社会固定资产投资91321亿元,同比增长33.5%,增速比上年同期加

快 7.2 个百分点……

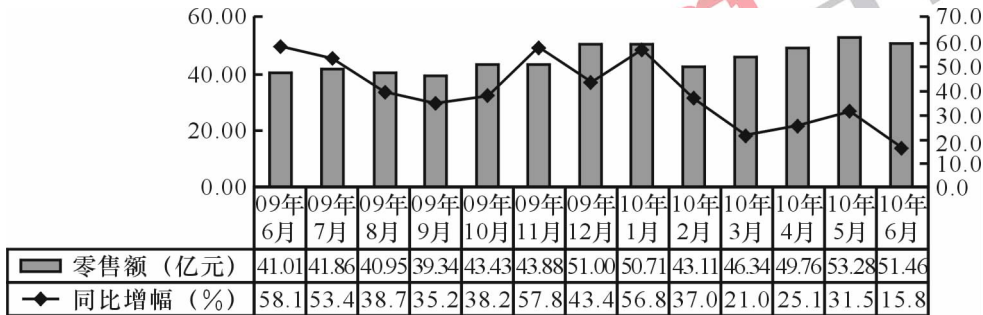
2008 年上半年,全社会固定资产投资同比增长()。

- A. 40.7% B. 33.5% C. 26.3% D. 24.2%

【解析】 本题考查同比增长概念。分析题干可知 2009 年上半年同比增长率为 33.5%，比 2008 年多 7.2 个百分点，因此 2008 年上半年的增长率为 $33.5\% - 7.2\% = 26.3\%$ 。因此，答案选择 C 选项。

【例 2】 (2010 年北京) 根据下表, 2009 年 7 月至 2010 年 6 月, 汽车零售额环比增幅最大的月份, 其零售额约比上月增加()。

- A. 7.1 亿元 B. 7.6 亿元 C. 13.9 亿元 D. 15.4 亿元



【解析】 本题考查环比概念。环比是与紧紧相连的一个周期进行比较, 在本题中也就是与上个月相比。从 2009 年 7 月到 2010 年 6 月的柱状图数据中, 可以看出 2009 年 12 月的环比增幅应该是最大的, 其零售额约比上月增加 $51 - 43.88 = 7.12$ (亿元)。因此, 本题答案选择 A 选项。

【例 3】 (2012 年安徽) 2009 年 7 月, 全国钢材出口 181 万吨, 比上月增加 38 万吨; 进口 174 万吨, 比上月增加 11 万吨。钢坯进口 57 万吨, 比上月增加 19 万吨。焦炭出口 5 万吨, 比上月增加 2 万吨。

下列选项中, 2009 年 7 月, 环比增长率最高的为()。

- A. 钢材出口量
B. 钢材进口量
C. 钢坯进口量
D. 焦炭出口量

【解析】 本题考查环比增长率比较。根据增长率计算公式,即比较

$\frac{38}{181-38} = \frac{38}{143}$, $\frac{11}{174-11} = \frac{11}{163}$, $\frac{19}{57-19} = \frac{19}{38}$, $\frac{2}{5-2} = \frac{2}{3}$ 的大小,简单观察发现 D 选项明显是最高
的。因此,答案选择 D 选项。



华图教育
HUATU.COM



华图教育
HUATU.COM



术语(三):比重

黄金法则

所有部分的比重之和应为 100%。某部分的比重上升,则一定有其他部分所占比重下降。部分的增长率大于总体,则部分占总体的比重增大;部分的增长率小于整体,则部分占总体的比重减小。

破解密钥

资料分析中,当出现“量 A 占量 B 的……”,都是比重类问题。比重类问题的计算包括简单比重计算、比重比较、基期比重计算和基期、现期比重差值计算等题型。

比重:

(1) 比重是指部分在整体中所占的比例,通常用百分数表示。

(2) 量 A 占量 B 的比重即为 $\frac{A}{B}$ 。

基期比重计算:

若某部分的现期量为 A,增长率为 a,整体的现期量为 B,增长率为 b,则基期的某部分占整体的比重为 $\frac{A \div (1+a)}{B \div (1+b)}$,化简后可得 $\frac{A}{B} \times \frac{1+b}{1+a}$ 。

基期、现期比重差值计算:

若某部分的现期量为 A,增长率为 a,整体的现期量为 B,增长率为 b,则基期某部分占整体的比重为 $\frac{A}{B} \times \frac{1+b}{1+a}$,现期、基期部分占整体比重差值为 $\frac{A}{B} - \frac{A}{B} \times \frac{1+b}{1+a}$,化简后可得 $\frac{A}{B} \times \frac{a-b}{1+a}$ 。

魔力四射

【例 1】(2012 年天津)

2011 年某市进出口总额及其增长速度

指标	绝对数(万美元)	比上年增长%
出口额	10182	-24.8
其中:国有企业	4398	-46

2011年国有企业的出口额占全部出口额的比重约为()。

- A. 25.2% B. 32.5% C. 43.2% D. 19.8%

【解析】 本题考查现期比重计算。根据比重的定义,可得计算式为 $\frac{4398}{10182}$, 计算结果的首位一定是

4, 结合选项发现只有C满足。因此,答案选择C选项。

【例2】 (2012年北京) 2011年8月份,社会消费品零售总额14705亿元,同比增长17.0%,城镇消费品零售额12783亿元,同比增长17.1%;乡村消费品零售额1922亿元,增长16.4%,则2010年8月城镇消费品零售额占社会消费品零售总额的比重为()。

- A. 76% B. 87% C. 92% D. 82%

【解析】 本题考查基期比重的计算,计算式为 $\frac{12783}{14705} \times \frac{1+17.0\%}{1+17.1\%} \approx \frac{13}{15} \approx 87\%$ 。因此,答案选择B选项。

【例3】 (2010年江苏) 已知今年江苏商品房销售面积9922.73万平方米,增速62.9%,东部地区商品房销售面积48248.21万平方米,增速47.6%。则江苏商品房销售面积占东部地区销售面积的比重与去年相比()。

- A. 下降了1.2个百分点 B. 下降了0.6个百分点
C. 上升了3.8个百分点 D. 上升了1.9个百分点

【解析】 本题考查基期、现期比重差值计算。今年的比重为 $\frac{9922.73}{48248.21}$, 去年的比重为 $\frac{9922.73}{48248.21} \times \frac{1+47.6\%}{1+62.9\%}$, 所以得到今年的比重与去年比重的差值为: $\frac{9922.73}{48248.21} - \frac{9922.73}{48248.21} \times \frac{1+47.6\%}{1+62.9\%} = \frac{9922.73}{48248.21} \times \frac{62.9\% - 47.6\%}{1+62.9\%} \approx \frac{10}{49} \times \frac{15}{160} > \frac{3}{160} \approx 1.9\%$ 。因此,答案选择D选项。

通关自测

【练习1】 2009年全国海洋生产总值31964亿元,比上年增长8.6%。全国海洋生产总值占国内生

生产总值的 9.53%，占沿海地区生产总值的 15.5%。海洋第一产业增加值 1879 亿元，海洋第二产业增加值 15062 亿元，海洋第三产业增加值 15023 亿元。

2009 年我国海洋经济三次产业值的比重比值约为()。

- A. 5.9 : 47.3 : 46.8 B. 5.9 : 47.1 : 47.0
C. 7.2 : 47.3 : 45.5 D. 7.2 : 47.0 : 45.8

【练习 2】2009 年世界天然气贸易量达 8768.5 亿立方米，较 2005 年增长 7.7%。其中管道天然气贸易量为 6337.7 亿立方米；液化天然气贸易量为 2427.7 亿立方米。

2009 年世界液化天然气贸易量占天然气贸易总量的比重为()。

- A. 17.5% B. 22.2% C. 27.7% D. 38.3%

【练习 3】

2009 年某省各类产品产量情况

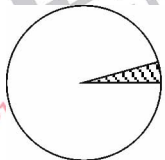
	产量(万吨)	同比增长率(%)
水产品	702.81	3.3
其中:海洋捕捞	152.75	-0.7
海水养殖	234.62	5.2
淡水捕捞	12.65	1.3
淡水养殖	302.79	4.0

2009 年，海水养殖业产量占水产品养殖业的比重为()。

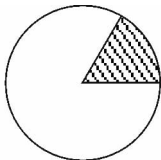
- A. 77.5% B. 33.4% C. 60.8% D. 43.7%

【练习 4】2011 年我国全年货物出口 18986 亿美元，增长 20.3%，其中对欧盟出口 3560 亿元，增长 14.4%。

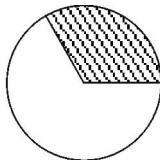
下列最能体现 2011 年我国对欧盟出口额占全年出口额比重的图例是()。



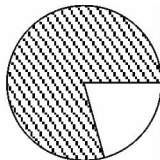
A



B



C



D

自测答案

1. B **【解析】** 本题考查现期比重计算。分析题干得知,海洋经济三次产业值的比重之和是100%,所以只需计算每个产业的比重即可,第一产业的比重为 $\frac{1879}{31964}$,结果的首位一定是5,排除CD选项;第二产业与第三产业的比重之差为 $\frac{15062-15023}{31964} = \frac{39}{31964} \approx 0.1\%$,而 $47.1\% - 47.0\% = 0.1\%$,B选项满足。因此,答案选择B选项。

2. C **【解析】** 本题考查现期比重计算。根据比重定义,可得计算式为 $\frac{1}{3} > \frac{2427.7}{8768.5} > \frac{1}{4}$ 或 $\frac{2427.7}{8768.5} \approx \frac{24}{88} = \frac{3}{11} = \frac{27}{99}$,即略大于27%,观察选项,只有C选项满足。因此,答案选择C选项。

3. D **【解析】** 本题考查现期比重计算。根据比重定义,可得计算式为 $\frac{234.62}{234.62+302.79} \approx \frac{234}{536}$,结算结果的首位一定是4,D选项符合。因此,答案选择D选项。

4. B **【解析】** 本题考查现期比重计算。本题的选项设置比较新颖,但是基本解题方法是不变的。根据比重定义,可得计算式为 $\frac{3560}{18986} \approx 20\%$,观察选项,只有B选项符合。因此,答案选择B选项。



数学家维纳的年龄

数学家维纳在他博士毕业典礼上说：“我现在的年龄连续自乘三次可以得到一个四位数，连续自乘四次可以得到一个六位数，并且这两个数刚好包含数字 0 到 9 各一次，所以所有数字都得朝拜我，我将在数学领域干出一番大事业。”那么维纳当时的年龄为多少岁？

术语(四):拉动增长率与增长贡献率

黄金法则

如果 B 是 A 的一部分, B 对 A 的拉动增长率是指 B 的增量与 A 的基期量的比值; B 对 A 的增长贡献率是指 B 的增量与 A 的增量之间的比值。

破解密钥

在解题中,要注意分清拉动增长率与增长贡献率之间的区别,其中各部分的拉动增长率之和为总量的同比增长率,各部分的增长贡献率之和为 100%。

拉动增长率:

拉动增长率是指总体中某部分的增加值带动总体增长的百分比,具体的计算公式为:**拉动增长率=现期某部分的增加值÷基期的总值×100%**。例如,某国去年的城镇固定资产投资中,三大产业的投资额分别为 50、50、100 亿元,今年三大产业投资额分别增长了 10、15、25 亿元,则今年该国城镇固定资产投资同比增长率为 $50 \div 200 = 25\%$,其中三大产业对城镇固定资产投资的拉动增长率分别为 $10 \div 200 \times 100\% = 5\%$, $15 \div 200 \times 100\% = 7.5\%$, $25 \div 200 \times 100\% = 12.5\%$ 。

增长贡献率:

增长贡献率是指总体中某部分的增加值占总值增加量的比重,具体的计算公式为:**增长贡献率=某部分的增量÷总量的增量×100%**。例如,某国去年的城镇固定资产投资中,三大产业的投资额分别为 50、50、100 亿元,今年三大产业投资额分别增长了 10、15、25 亿元,则三大产业共增加了 50 亿元,三大产业对城镇固定资产的增长贡献率分别为 $10 \div 50 \times 100\% = 20\%$, $15 \div 50 \times 100\% = 30\%$, $25 \div 50 \times 100\% = 50\%$ 。

魔力四射

【例 1】(2012 年浙江)“十一五”期间,我国农村居民人均纯收入由 2005 年的 3255 元提高到 2010 年的 5915 元,增加 2664 元,年均增长 12.7%。2010 年农村居民的工资性收入人均 2431 元,比 2005

年增加 1257 元,增长 1.1 倍。则“十一五”期间,我国农村居民人均工资性收入的增加值对农村居民人均纯收入增加的贡献率约为()。

- A. 37.1% B. 43.6% C. 47.2% D. 50.4%

【解析】根据增长贡献率基本公式可知,农村居民人均工资性收入的增加值对农村居民人均纯收入增加的贡献率约为 $\frac{1257}{2664} \times 100\% \approx \frac{1250}{2650} \times 100\% = \frac{25}{53} \times 100\% \approx 47\%$ 。因此,本题答案选择 C 选项。

【例 2】(2010 年北京)限额以上批发零售企业 2010 年 1—6 月实现汽车类零售额 294.7 亿元,同比增长 67.83 亿元。同时汽车消费的快速增长带动了石油等消费品的快速增长,2010 年 1—6 月石油及制品类零售额 222.3 亿元,同比增长 67.28 亿元。汽车及石油及制品类零售额的增长拉动限额以上批发和零售业零售额增长 19.8 个百分点。则 2009 年 1—6 月限额以上批发和零售业零售额约为()。

- A. 682.4 亿元 B. 381.9 亿元 C. 135.1 亿元 D. 1145.8 亿元

【解析】本题考查拉动增长率的概念。由题干中的数据可知,汽车及石油及制品类零售额的增长量为 $67.83 + 67.28 = 135.11$ (亿元),拉动限额以上批发和零售业零售额增长 19.8 个百分点,则 2009 年 1—6 月限额以上批发和零售业零售额约为 $\frac{135.11}{19.8\%} \approx \frac{136}{0.2} = 680$ (亿元),与 A 项最接近。因此,本题答案选择 A 选项。



田忌赛马

有一天,齐王要田忌和他赛马,规定每个人从自己的上、中、下三等马中各选一匹来赛,采用三局两胜制。齐王的每一等次的马比田忌同样等次的马都要强,因而,如果田忌用自己的上等马与齐王的上等马比,用自己的中等马与齐王的中等马比,用自己的下等马与齐王的下等马比,肯定会输。田忌采用什么方法才能确定赢得比赛?如果田忌的马随机出阵,赢得比赛的概率是多少?

术语(五):平均增长率

黄金法则

$$r = \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{n}; r = \frac{\frac{B}{A} - 1}{n}$$

破解密钥

当平均增长率比较小时,一般利用平均增长率近似计算公式,从而简化运算;当平均增长率比较大时,一般使用代入验证法,确定正确答案。

平均增长率:

如果某个量初期为 A , 经过 n 个周期之后变为 B , 平均增长率为 r , 则 $A(1+r)^n = B$ 。

平均增长率近似公式:

(1) 如果某个量初期为 A , 经过 n 个周期之后变为 B , 平均增长率为 r , 则 $A(1+r)^n = B$, 一般地, 当 $|r| < 5\%$ 时, $(1+r)^n = 1+nr$, 此时可近似计算出

$$r = \frac{\frac{B}{A} - 1}{n}$$

得到的近似值比实际值略小。

(2) 一般地, 若第二期相对第一期的增长率为 r_1 , 第三期相对第二期的增长率为 r_2, \dots , 第 $n+1$ 期相对第 n 期的增长率为 r_n , 平均增长率为 r , 则有 $(1+r)^n = (1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_n)$, 得到 $r = \sqrt[n]{(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_n)} - 1$ 。若 r_1, r_2, \dots, r_n 之间比较接近, 可得出 $r = \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{n}$, 此时求得的近似值会比真实值略大。

魔力四射

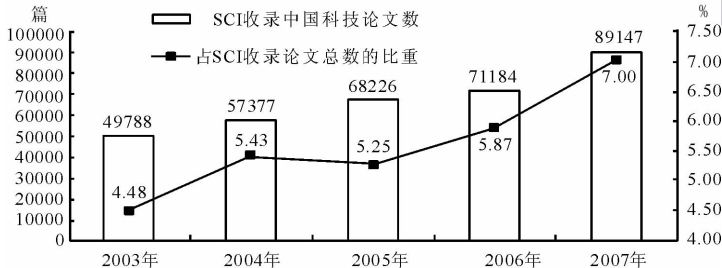
【例 1】(2012 年浙江)2010 年农村居民得到的转移性收入人均 453 元, 比 2005 年增加 305 元, 增长 2.1 倍。则“十一五”期间, 我国农村居民人均转移性收入的年均增长率约为()。

- A. 10% B. 15% C. 20% D. 25%

【解析】本题考查增长率计算。由选项可知,平均增长率是大于等于 10% 的,因此不能运用第一个近似公式求解。设年均增长率为 x ,则可得 $(1+x)^5 = 2.1+1$,代入验证,可得 D 项符合。因此,本题正确答案选择 D 选项。

【例 2】(2010 年 9 月联考)下图是 SCI 收录中国科技论文情况。则 2003—2007 年间,SCI 收录中国科技论文数的年均增长率约为()。

- A. 6% B. 10% C. 16% D. 25%



2003—2007 年 SCI(科学引文索引)收录中国科技论文情况

【解析】解法一:由选项可知,平均增长率大于 5%,因此不能运用第一个近似公式求解。2007 年收录的论文数量是 2003 年的 $\frac{89147}{49788} \approx \frac{89}{50} = 1.78$ 倍,设年均增长率为 x ,可得 $(1+x)^4 = 1.78$,代入选项验证可得出 C 项最接近,为正确答案。因此,本题答案选择 C 选项。

解法二:本题可以用第二种近似计算公式,2004 年的增长率约为 $\frac{57-50}{50} \times 100\% = 14\%$,2005 年

的增长率约为 $\frac{68-57}{57} \times 100\% \approx 19.3\%$, 2006 年的平均增长率为 $\frac{71-68}{68} \times 100\% \approx 4.4\%$, 2007 年的年均增长率为 $\frac{89-71}{71} \times 100\% \approx 25.4\%$, 年均增长率约为 $\frac{14\% + 19.3\% + 4.4\% + 25.4\%}{4} \approx 15.8\%$, 与 C 项最接近。因此, 本题答案选择 C 选项。

通关自测

【练习题】

1949—2008 年公共卫生体系发展状况统计表

年份	卫生机构数(个)	床位数(万张)	卫生技术人员数(万人)
1957	122954	30	104
1962	217985	69	141
1965	224266	77	153
1978	169732	185	246
1985	200866	223	341

建国以来, 我国医院和卫生院床位数年平均增长率最高的时期为()。

- A. 1957—1962 年 B. 1962—1965 年 C. 1965—1978 年 D. 1978—1985 年

自测答案

1. A 【解析】本题考查年平均增长率的大小比较。根据年平均增长率的定义, 可得四个选项的计算式为: $30 \times (1+a)^5 = 69$, 即 $(1+a)^5 = 2.4$; $69 \times (1+b)^3 = 77$, 即 $(1+b)^3 = 1.1$; $77 \times (1+c)^{13} = 185$, 即 $(1+c)^{13} \approx 2.4$; $185 \times (1+d)^7 = 223$, 即 $(1+d)^7 \approx 1.2$ 。观察即可发现, 最大的是 A 选项。因此, 答案选择 A 选项。



智斗猪八戒

唐僧师徒西天取经归来后，来到郭家村，村民热烈欢迎，拉他们到家里做客。面对村民的盛情款待，师徒们觉得过意不去，有机会就帮他们干活。可没多久，猪八戒好吃懒做的坏毛病又犯了，他觉得这样干活太辛苦，于是招收了 9 个徒弟，经常带着徒弟出去蹭吃蹭喝，老百姓叫苦不迭，被他们吃得快揭不开锅了。

邻村有个叫灵芝的姑娘，她聪明伶俐，为人善良，决定惩治一下八戒们。她来到郭家村，开了一个饭铺，八戒带着 9 个徒弟闻讯赶来，灵芝姑娘假装惊喜地说：“悟能师傅，以后你们就到我这儿来吃饭，不要到别的地方去了。”她停了一下说：“这儿有张圆桌，专门为你们准备的，你们十位每次都按不同的次序入座，等你们把所有的次序都坐完了，我就免费提供你们饭菜。但在此之前，你们每吃一顿饭，都必须为村里的一户村民做一件好事，你们看怎么样？”八戒一听这诱人的建议，兴奋得不得了，连声说好。于是他们每次都按约定的条件来吃饭，并记下入座次序。这样过了几年，新的次序仍然层出不穷，这是为什么呢？



第三十五计 ★★★八大速算法

技巧(一):估算法与直除法

 黄金法则

估算法是指通过对算式中的数值进行粗略估值并代入计算的方法;直除法是指通过直接相除的方式得到商的首位或首两位,从而判定答案的方法。

 破解密钥

当选项相差较大,或者被比较数据相差较大,且运算过程较复杂或计算式较复杂时,采用估算法;当比较或计算分数的大小时,选项首位不同或首两位不同,采用直除法。

估算法

三条基本原则:

1. 估算法是为了简化计算采用的近似取整计算;
2. 除法估算的原则是分子分母同大同小,乘法估算的原则是一大一小;
3. 估算法经常会涉及数位的截取,一般选择保留前三位有效数字。

直除法

在计算分数的大小时,通过“直接相除”的方式得到商的首位或首两位。直除法经常选择截位来进行首位或首两位的判断:一般情况下,若选项的首位或首两位不同,选择除数保留两位有效数字即可;

若除数首位是1和2,一般保留三位有效数字进行计算。

 魔力四射

【例1】(2012年安徽)下列哪一年全国海洋生产总值占国内生产总值的比重同比增幅最大?(见下表)()

A. 2002 年 B. 2004 年 C. 2006 年 D. 2008 年

年份	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
所占比重(%)	8.68	9.37	8.8	9.17	9.64	10.03	9.74	9.6

【解析】 本题考查增长率的比较。2002 年的增幅 = $\frac{9.37-8.68}{8.68}$, 2004 年的增幅 = $\frac{9.17-8.8}{8.8}$, 2006 年的增幅 = $\frac{10.03-9.64}{9.64}$, 2008 年的增幅 = $\frac{9.6-9.74}{9.74}$, 观察可以发现, 选项之间数据差别较大。2002 年的增幅分子最大, 分母最小, 故 2002 年的增幅最大。答案选择 A 选项。

【例 2】 (2012 年北京) 2011 年空气质量一级日数排名第 4 的城市(三亚, 全年有 228 天空气质量等级达到一级), 空气质量在一级以下的天数占全年比重约为()。

A. 38% B. 45% C. 55% D. 62%

【解析】 本题考查比重计算。三亚空气质量在一级以下的天数的比重 = $\frac{365-228}{365} = \frac{137}{365}$, 选项首位均不相同, 采用直除法速算, 首位为 3。答案选择 A 选项。

通关自测

【练习 1】 2009 年, 某省全年粮食作物播种面积 253.85 万公顷, 比上年增长 1.5%; 糖蔗种植面积 13.58 万公顷, 下降 0.2%; 油料种植面积 33.14 万公顷, 增长 2.3%; 蔬菜种植面积 113.84 万公顷, 增长 2.3%。

2009 年某省各类产品产量情况

	产量(万吨)	同比增长率(%)
糖蔗	1116.11	3.4
油料	84.64	3.8
蔬菜	2567.17	5.6

以下三种作物按 2009 年亩产从高到低排序正确的是()。

- A. 糖蔗 油料 蔬菜 B. 糖蔗 蔬菜 油料
C. 蔬菜 油料 糖蔗 D. 蔬菜 糖蔗 油料

【练习 2】2009 年 1—8 月,某地区对外出口额分别为 9951.23,6776.98,3118.79,4250.84,9134.21,7412.88,7302.77,2675.75 万美元,请问该地区 2009 年前八个月对外出口总额为多少亿美元? ()

- A. 4.76 B. 5.07 C. 5.34 D. 5.78

【练习 3】改革开放以来,广东省社会消费品零售总额迅猛增长,1985、1995、2005 年的值分别为 289、2478、7883 亿元人民币。那么,1995 年值为 1985 年值的()倍,2005 年值为 1995 年值的()倍

- A. 9.1 3.2 B. 8.6 3.2 C. 9.1 2.9 D. 8.6 2.9

【练习 4】2008 年,新疆农作物总播种面积 6805.31 万亩,其中,粮食播种面积 2474.95 万亩。请问粮食播种面积占总播种面积的比例为多少? ()

- A. 35.12% B. 36.37% C. 37.49% D. 38.25%



自测答案

1. B 【解析】本题考查分数大小比较。结合题干可得计算式为:糖蔗为 $\frac{1116.11}{13.58} = 80^+$,油料为

$\frac{84.64}{33.14} = 3^-$,蔬菜为 $\frac{2567.17}{113.84} = 20^+$,通过简单的估算,可以发现从高到低为:糖蔗、蔬菜、油料。因此,

答案选择 B 选项。

2. B 【解析】本题考查多个数字的加法。结合选项分析,所计算数字可以四舍五入近似计算,进而得到计算式为 $1.0 + 0.68 + 0.32 + 0.42 + 0.91 + 0.74 + 0.73 + 0.27 = 5.07$ 。因此,答案选择 B 选项。

3. B 【解析】本题考查倍数计算。通过分析选项得知,本题可以通过首位判断来确定答案。

$\frac{2478}{289}$ 结果商的首位一定是 8,排除 AC 选项; $\frac{7883}{2478}$ 结果商得首位一定是 3,排除 D 选项。因此,答案选择 B 选项。

4. B 【解析】本题考查比重计算。分析选项发现,计算结果的前两位不同,进而得知通过判断结果的前两位确定答案。计算式子为 $\frac{2474.95}{6805.31} \approx \frac{2474}{68} = 36^+$,B 选项符合要求。因此,答案选择 B 选项。



古寺有多少僧人

下面一首诗出自清朝数学家徐子云的著作,请算出诗中有多少僧人。

巍巍古寺在云中,不知寺内多少僧。三百六十四只碗,看看用尽不差争。

三人共食一只碗,四人共吃一碗羹。请问先生明算者,算来寺内几多僧?

技巧(二):化同法与放缩法

黄金法则

比较分母大小时,化同法是将分子(或分母)化至完全相同或相近,再进行比较;放缩法是将其中一项或中间结果适当地放大或缩小,实质为就近取整,再进行比较。

破解密钥

比较两个分数的大小时,若一个分数的分子、分母分别小于另一个分数的分子、分母,并且两个分数的分子或分母存在明显的倍数关系,考虑用化同法;在精度要求不高,或数字相差较大时,可考虑用放缩法。

化同法:

当两个分数的分子(或分母)有明显的倍数关系时,将一个数的分子和分母同时乘一个数,使两数的分子和分母相同或相近,再进行比较,这种方法称为化同法。

注:化同法一般在选项中数据前两位相同时使用。

放缩法:

要比较分数 A 和 B 的大小,有时可以将 A 或 B 放大或缩小,寻找一个中间量,如将 A 放大成 C ,即 $A < C$,若 $C < B$,则 $A < B$,这种方法称为放缩法。放缩的方向须由待比较的两数(选项范围)决定。

魔力四射

【例 1】下表为某大学的 2004—2008 年全校博士生人数变化情况表。根据下表,该大学哪年的博士生人数增长率最高? ()

A. 2005 年

B. 2006 年

C. 2007 年

D. 2008 年

年份	2004	2005	2006	2007	2008
博士生人数(人)	59	85	120	169	255

【解析】 本题考查增长率比较。增长率的比较可以用现期量÷基期量代替,采用化同法比较大小。

2006 年与 2005 年: $\frac{120}{85} = \frac{120 \times 7}{85 \times 7} = \frac{840}{595} < \frac{85}{59}$, 2005 年的增长率高; 2005 年与 2007 年: $\frac{85}{59} = \frac{85 \times 2}{59 \times 2} = \frac{170}{118} >$

$\frac{169}{120}$, 2005 年的增长率高; 2005 年与 2008 年: $\frac{85}{59} = \frac{85 \times 3}{59 \times 3} = \frac{255}{177} < \frac{255}{169}$, 2008 年的增长率高, 因此, 博士

生人数增长率最高的是 2008 年。答案选择 D 选项。

【例 2】 某地今年实现 GDP 总产值 2713 万元, 与去年相比增长 10.9%, 那么该地去年 GDP 总产值应该为多少万元? ()

A. 2397

B. 2446

C. 2489

D. 2507

【解析】 本题考查基期值的计算。选项差别不大, 可以利用“直除法”, 但计算量较大, 可通过代入排除法结合放缩法来锁定结果。

A 选项: $\frac{2713-2397}{2397} > \frac{300}{2400} = \frac{1}{8} = 12.5\%$; 所以答案比 2397 要大。C 选项: $\frac{2713-2489}{2489} < \frac{230}{2400} <$

10%, 所以答案要比 2489 小。答案选择 B 选项。

【例 3】

2007 年部分国家(地区)国民生产总值

国家(地区)	人均国民生产总值(美元)	国民生产总值(亿美元)
中国香港	31610	2067
哥斯达黎加	5560	252
新加坡	32470	1613
多米尼加	3550	367

2007 年, 下列国家(地区)中人口最少的是()。

A. 中国香港

B. 哥斯达黎加

C. 新加坡

D. 多米尼加

【解析】本题考查分数大小比较。分数大小比较类题目一般采取两两比较排除法解题,分析题干可知,人口数=国民生产总值÷人均国民生产总值,即比较 $\frac{2067}{31610}$, $\frac{252}{5560}$, $\frac{1613}{32470}$, $\frac{367}{3550}$ 的大小。根据放缩法可判定 $\frac{2067}{31610} > \frac{1613}{32470}$,排除A选项; $\frac{252}{5560} < \frac{367}{3550}$,排除D选项。 $\frac{252}{5560} = \frac{1512}{33360} < \frac{1613}{32470}$,排除C选项。因此,答案选择B选项。

【例4】2009年,某地农村居民全年人均纯收入为7285元,较上一年增长10.6%。如果增长速度不变,预计2010年该地农村居民全年人均纯收入将达到多少?

- A. 7914 B. 7976 C. 8012 D. 8057

【解析】本题考查现期量计算。根据现期量计算公式,得知2010年收入为 $7285 \times (1 + 10.6\%) > 7285(1 + 10\%)$, $7285(1 + 10\%) = 7285 + 728.5 = 8013.5$,结合选项,D选项符合要求。因此,答案选择D选项。

通关自测

【练习1】2009年度全国旅行社的旅游业务营业收入为1745.59亿元,同比增长8.87%;旅游业务毛利润为120.27亿元,旅游业务毛利率为6.89%。

2009年度全国旅行社旅游业务营业收入表

	营业收入(亿元)	同比增长(%)	毛利润(亿元)	同比增长(%)
入境旅游业务	222.15	-1.21	18.69	4.72
国内旅游业务	1139.10	11.79	76.33	16.64
出境旅游业务	384.34	6.92	25.25	28.99

下列各项中,2009年毛利率最低的是()。

- A. 国内旅游业务 B. 入境旅游业务 C. 出境旅游业务 D. 总体旅游业务

【练习 2】下表为某公司四个部门 2009 年全年的营销总费用,以及营销总费用占总销售额的比例。请问四个部门当中,哪个部门 2009 年全年的总销售额最高?

	A 部门	B 部门	C 部门	D 部门
营销总费用(万元)	213.5	194.9	234.8	165.3
营销总费用占总销售额的比例	5.3%	7.6%	5.2%	6.1%

- A. A 部门 B. B 部门 C. C 部门 D. D 部门

【练习 3】

2004 年外资进入我国 IT 业的情况

行业	销售收入		利润	
	总额(亿元)	比例(%)	总额(亿元)	比例(%)
电子计算机制造	7743.1	93.69	164.2	92.09
电子器件制造	2213.7	85.37	108.9	85.34
电子元件制造	2124.9	79.61	110.5	75.27
通信设备制造	3189.4	71.17	237.9	76.40

2004 年,在我国各 IT 分行业中,外资企业资产利润率最高的是()。

- A. 电子计算机制造 B. 电子器件制造
C. 电子元件制造 D. 通信设备制造

【练习 4】……(2008 年)水泥消费量 13.7 亿吨,增长 3.5%……

与 2007 年相比,2008 年我国的水泥消费增加量和以下哪项最接近?()

- A. 8000 万吨 B. 5000 万吨 C. 800 万吨 D. 500 万吨

自测答案

1. C 【解析】本题考查分数比较类。毛利率=毛利润÷营业收入,首先排除D选项,因为总体旅游业务毛利率一定是大小居中的,不可能是最低。剩余三个选项的毛利率为 $\frac{76.33}{1139.1}$, $\frac{18.69}{222.15}$,

$\frac{25.25}{384.34}$,无法直接看出大小关系,用化同法比较: $\frac{18.69}{222.15} = \frac{74.76}{888.6}$ 该结果肯定大于A选项,排除B选项;

$\frac{25.25}{384.34} = \frac{75.75}{1153.02} < \frac{76.33}{1139.1}$,排除A选项。因此,答案选择C选项。

2. C 【解析】本题考查分数大小比较。总销售额=营销总费用÷营销费用所占比例,观察数据发现,C部门的营销总费用最高,而其所对应的比例是最低的,即分子最大,而分母最小,结果肯定是最大的。因此,答案选择C选项。

3. D 【解析】本题考查分数大小比较。利润率=利润÷销售收入,即比较 $\frac{164.2}{7743.1}$, $\frac{108.9}{2213.7}$, $\frac{110.5}{2124.9}$, $\frac{237.9}{3189.4}$ 的大小,明显发现 $\frac{108.9}{2213.7} < \frac{110.5}{2124.9}$, $\frac{164.2}{7743.1} < \frac{237.9}{3189.4}$,排除AB选项, $\frac{110.5}{2124.9} = \frac{221}{4249.8} < \frac{237.9}{3189.4}$,即最大的是D选项。因此,答案选择D选项。

4. B 【解析】本题考查增长量计算。根据增长量计算公式,可得本题计算式为 $\frac{13.7}{1+3.5\%} \times 3.5\% < 13.7 \times 4\% = 0.548$ 亿吨=5480万吨。因此答案选择B选项。



数学家的遗嘱

阿拉伯数学家花拉子密立遗嘱时,他的妻子正怀着他们的第一胎小孩。“如果我亲爱的妻子帮我生个儿子,我的儿子将继承三分之二的遗产,我的妻子将得三分之一;如果是生女的,我的妻子将继承三分之二的遗产,我的女儿将得三分之一。”不幸的是,在孩子出生前,这位数学家就去世了。之后,发生的事更困扰大家,他的妻子帮他生了一对龙凤胎,而问题就发生在他的遗嘱内容。

如何遵照数学家的遗嘱,如何将遗产分给他的妻子、儿子、女儿呢?



技巧(三):插值法与差分法

黄金法则

比较 A 和 B 的大小,若可以找到一个数 x ,满足 $A > x$,而 $B < x$,则可判定 $A > B$ 。

差分法利用“差分数”代替“大分数”与“小分数”比较。

破解密钥

题目要求比较两个比较相近数的大小时,两数之间存在一个容易计算的中间值,可利用插值法计算。当待比较的分数大小非常接近时,可利用差分法进行比较。

插值法:

在计算数值或比较数值大小时,运用中间值进行“参照比较”的速算方式。一般所插数值为“特殊分数”,如 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{7}$ 等。

例:计算 $\frac{3281.3}{13057.2}$ 的值,选项中有 25.13% 和 24.87%,两选项中间有 0.25,而 $3281.3 \times 4 = 13125.2 > 13057.2$,所以 $\frac{3281.3}{13057.2} > 0.25$,则要选择 25.13%。

魔力四射

【例 1】(2009 年国考)2006 年,全国农村从业人员数量为 47852 万人,其中 6986 万人从事第三产业;东北地区农村从业人员数量为 3230 万人,其中 391 万人从事第三产业。请问,全国、东北地区农村从业人员中从事第三产业人员的比例分别是多少? ()

差分法:

把 $\frac{A+\Delta A}{B+\Delta B}$ 称为大分数, $\frac{A}{B}$ 称为小分数,分子、分母作差得到的新分数 $\frac{\Delta A}{\Delta B}$ 为差分数。若差分数 $>$ 小分数,则大分数 $>$ 小分数;若差分数 $<$ 小分数,则大分数 $<$ 小分数;若差分数 = 小分数,则大分数 = 小分数。

A. 13.6%, 12.7%

B. 14.6%, 12.7%

C. 13.6%, 12.1%

D. 14.6%, 12.1%

【解析】本题考查比重计算。可采用放缩法和插值法。全国： $6986 \times 7 > 6900 \times 7 = 48300 > 47852$ ，
 则 $\frac{6986}{47852} > \frac{1}{7} \approx 14.3\%$ ；东北地区： $\frac{391}{3230} < \frac{400}{3200} = \frac{1}{8} = 12.5\%$ 。答案选择 D 选项。

【例 2】(2011 年国考)2010 年上半年，全国原油产量为 9848 万吨，同比增长 5.3%，上年同期为下降 1%。进口原油 11797 万吨(海关统计)，增长 30.2%，则 2009 年上半年原油产量与原油进口量的关系是()。

A. 产量 > 进口量

B. 产量 < 进口量

C. 产量 = 进口量

D. 无法判断

【解析】本题考查基期量的比较。2009 年上半年，全国原油进口量 = $\frac{11797}{1.302}$ ，全国原油产量 = $\frac{9848}{1.053}$ ，差分数 = $\frac{1949}{0.249}$ ， $\frac{1949}{0.249} < \frac{2000}{0.25} = 8000$ ，而 $\frac{9848}{1.053} > \frac{9848}{1.1} > 8000$ ，因此差分数 < 小分数， $\frac{11797}{1.302} < \frac{9848}{1.053}$ ，即原油进口量小于原油产量。答案选择 A 选项。

通关自测

【练习 1】

下表是某市 2009 年旅游部门主要财务情况：

指标	宾馆、酒店	旅行社	景点	其他旅游企业
营业收入(万元)	722581	659313	239717	6342
经营利润(万元)	214594	25735	101714	445

问以下哪一类旅游部门 2009 年的经营利润占当年营业收入的比重最高？()

A. 宾馆、酒店 B. 景点 C. 旅行社 D. 其他旅游企业

【练习 2】

2006 年河北主要农产品产量 单位:万吨

指标	产量	比上年增长(%)
鲜果	1453.1	3.9
其中:园林水果	968.5	5.5

2006 年河北的园林水果在鲜果中所占的比重是多少? ()

A. 66.65% B. 68.91% C. 72.17% D. 74.29%

【练习 3】

2006 年我国部分城市空气质量指标

城市	可吸入颗粒物 (毫克/立方米)	二氧化碳 (毫克/立方米)	二氧化硫 (毫克/立方米)	空气质量达到及 好于二级的天数(天)
上海	0.086	0.051	0.055	324
南京	0.109	0.063	0.052	305

2006 年南京空气中可吸入颗粒物含量比上海高()。

A. 24.9% B. 26.7% C. 30.5% D. 32.6%

 自测答案

1. B 【解析】本题考查分数大小比较。选项所对应的四个比重为： $\frac{214594}{722581}$ ， $\frac{101714}{239717}$ ， $\frac{25735}{659313}$ ，

$\frac{445}{6342}$ 。插入分数 $\frac{1}{3}$ ，观察发现只有 B 选项大于 $\frac{1}{3}$ 。因此，答案选择 B 选项。

2. A 【解析】本题考查比重计算。结合题意得知计算式为： $\frac{968.5}{1453.1}$ ，该计算式结果的首位一定是 6，排除 CD 选项。对比 AB 发现，存在明显中间值 $\frac{2}{3}$ ， $\frac{2}{3} = \frac{968}{1452}$ ，即发现答案与 $\frac{2}{3}$ 几乎是一样大的。

因此，答案选额 A 选项。

3. B 【解析】本题考查增长率计算。根据增长率定义，可得计算式为 $\frac{109-86}{86} = \frac{23}{86}$ ，计算结果的首位一定是 2，排除 CD 选项。比较 AB 选项，发现存在一个明显的中间值 $\frac{1}{4}$ ，且 $\frac{1}{4} = \frac{23}{92} < \frac{23}{86}$ ，即 B 选项满足要求。因此，答案选择 B 选项。



欧拉智改羊圈

欧拉是数学史上著名的数学家，他在数论、几何学、天文数学、微积分等好几个数学的分支领域中都取得了出色的成就。年少时，他帮爸爸放羊，成了一个牧童。爸爸的羊群渐渐增多了，达到了 100 只。原来的羊圈有点小了，爸爸决定建造一个新的羊圈。他用尺量出了一块长方形的土地，长 40 米，宽 15 米，他一算，面积正好是 600 平方米，平均每一头羊占地 6 平方米。正打算动工的时候，他发现他的材料只够围 100 米的篱笆，不够用。欧拉知道后，建议将原来的 40 米边长缩短到 25 米，将原来 15 米的边长延长为 25 米，羊圈就变成了一个 25 米边长的正方形。最后，篱笆也够了，面积也够了。

技巧(四):凑整法与公式法

黄金法则

凑整法的本质是在计算过程中,根据某些数字的性质优先运算,近似得到“整数”,从而简化运算。

破解密钥

若因数出现 10、100 等附近的值,如 9、11、101 等,采用凑整法计算。当因数或除数中有 5、25、125 或特殊小数,如 0.25、0.67、0.143 及相应的倍数时,可采用凑整法速算。

凑整计算:

$$\begin{aligned} A \times 9 &= A \times 10 - A; A \times 99 = A \times 100 - A; \\ A \times 11 &= A \times 10 + A; A \times 101 = A \times 100 + A; \\ A \times 5 &= 10A \div 2; A \times 25 = 100A \div 4; A \times 125 = \\ &1000A \div 8; \\ A \div 5 &= 0.1A \times 2; A \div 25 = 0.01A \times 4; A \div \\ &125 = 0.001A \times 8. \end{aligned}$$

两年混合增长率:

$$r = r_1 + r_2 + r_1 \times r_2;$$

魔力四射

【例 1】

2009 年度全国旅行社旅游业务营业收入表

	营业收入(亿元)	同比增长(%)	毛利润(亿元)	同比增长(%)
入境旅游收入	222.15	-1.21	18.69	4.72

增长率逆推公式:

如果现期量为 A, 相对基期的增长率为 a%

$$(a < 5), \text{ 则基期值 } \frac{A}{1+a\%} \approx A \times (1-a\%)$$

(比真实值偏小);

增长率的展开式:

$$(1+x\%)^n \approx 1+nx \quad (x < 5) \quad (\text{比真实值偏小}).$$

2008 年度全国旅行社入境旅游业务营业收入约为多少亿元? ()

- A. 185 B. 210 C. 225 D. 235

【解析】 本题考查基期量计算。根据基期量计算公式可得计算式为 $\frac{222.15}{1-1.21\%} \approx 222.15 \times (1+1.21\%) \approx 225$ 。因此, 答案选择 C 选项。

【例 2】 (2011 年浙江) 2009 年, 城镇居民人均建筑面积 29.95 平方米, 农民人均居住面积 31.9 平方米, 分别增长 1.5% 和 4.0%。

2008 年 H 省城镇居民人均建筑面积约比农民人均居住面积()。

- A. 少 1.62 平方米 B. 少 1.17 平方米
C. 多 0.23 平方米 D. 多 0.85 平方米

【解析】 本题考查基期量差值计算。根据基期量计算公式可得, 2008 年城镇的面积计算式为 $\frac{29.95}{1+1.5\%} \approx 29.95 \times (1-1.5\%) \approx 29.95 - 0.45 = 29.5$, 2008 年农民的面积计算式为 $\frac{31.9}{1+4\%} \approx 31.9 \times (1-4\%) = 30.6$, 即城镇居民的面积比农民的少约 $30.6 - 29.5 = 1.1$ 。因此, 答案选择 B 选项。

【例 3】 (2012 年安徽) 2009 年 1—7 月, 全国粗钢产量 31731 吨, 同比增长 2.9%, 增速同比下降 6.4 个百分点。

2007 年 1—7 月, 全国粗钢产量约为多少亿吨? ()

- A. 2.0 B. 2.4 C. 2.8 D. 3.2

【解析】 本题考查间隔增长量计算。首先根据两年混合增长率公式求出增长率, $2.9\% + 6.4\% = 9.3\%$, 则混合增长率 = $2.9\% + 9.3\% + 2.9\% \times 9.3\% \approx 12.5\%$, 进而得到 2007 年的产量为

$\frac{31731}{1+12.5\%} \approx 3.2 \times \frac{8}{9} \approx 2.8$ 。因此, 答案选择 C 选项。

【例 4】 (2011 年联考) 2008 年国家投资 26.6 亿, 全国民政事业投资总额 66.6 亿, 民政事业基本建设投资总额中, 国家投资所占比重约为()。

- A. 45% B. 40% C. 35% D. 30%



【解析】 本题考查比重计算。国家投资占全国民政事业总投资的比重 $= \frac{26.6}{66.6} \approx \frac{26.6 \times 3}{2 \times 100} = 39.9\%$ ，与 40% 较为接近。答案选择 B 选项。

【例 5】 (2011 年国考) 2010 年上半年，全国原油产量为 9848 吨，同比增长 5.3%，而 2009 年上半年相比 2008 年同期下降 1%。

2010 年上半年全国原油产量比 2008 年同期约增长了()。

- A. 1.8% B. 4.2% C. 6.3% D. 9.6%

【解析】 本题考查两年混合增长率(间隔增长率)的计算，根据计算公式， $r = 5.3\% - 1\% - 5.3\% \times 1\% = 4.247\%$ ，与 4.2% 较为接近。答案选择 B 选项。

通关自测

【练习 1】 $5784 \div (1 + 3\%) = ()$

- A. 5702 B. 5615 C. 5684 D. 4450

【练习 2】 $240 \div (1 + 1.5\%) = ()$

- A. 195.6 B. 217.9 C. 229.4 D. 236.5

【练习 3】 2005 年某市房价上涨 16.8%，2006 年房价上涨了 6.2%，则 2006 年的房价比 2004 年上涨了()。

- A. 23% B. 24% C. 25% D. 26%

【练习 4】 2007 年第一季度，某市汽车销量为 10000 辆，第二季度比第一季度增长了 12%，第三季度比第二季度增长了 17%，则第三季度汽车的销售量为()。

- A. 12900 B. 13000 C. 13100 D. 13200

自测答案

1. B **【解析】** 根据增长率化除为乘公式，可得 $5784 \div (1 + 3\%) \approx 5784 \times (1 - 3\%) \approx 5610$ 。因此，答案选择 B 选项。

2. D **【解析】**根据增长率化除为乘公式,可得 $240 \div (1 + 1.5\%) \approx 240 \times (1 - 1.5\%) = 236.4$ 。因此,答案选择 D 选项。
3. B **【解析】**根据混合增长率公式,2006 年比 2004 年上涨了 $16.8\% + 6.2\% + 16.8\% \times 6.2\% \approx 24\%$ 。因此,答案选择 B 选项。
4. C **【解析】**本题考查间隔基期量计算。首先根据混合增长率公式计算出增长率,根据公式可得增长率为 $12\% + 17\% + 12\% \times 17\% \approx 31\%$,则第三季度的销量为 $10000 \times (1 + 31\%) = 13100$ 。因此,答案选择 C 选项。



聪明青年智当女婿

在古代的一个欧洲国家里,有一位非常漂亮的公主,希望挑选一个聪明的青年做她的丈夫。国王知道后,找来许多大臣,商讨了一个选女婿的方案。按照商讨的方案。前来参加竞争的是 100 名已被精心挑选过的青年。一位大臣向大家宣布了规则:竞选人以公主为首排成一个横列。在国王下达报数令后,由公主开始报数,每报数一次,所有的偶数出列。经过多次报数后,谁能够唯一地留在公主的身边,谁就是被选的女婿。

竞选开始了!那 100 名青年随着公主整整齐齐地排成一个横列。国王一声令下:“报数!”成千上万双眼睛都紧紧地注视着他们。一批竞选人落选了,又一批竞选人落选了……经过 6 次报数后,一个从小就喜爱数学的青年赢得了胜利。

这位聪明的青年人获胜的秘诀在哪里呢?

第三十六计 ★★★★★七大题型

题型(一):计算类之 $\frac{A}{B}$ 型
 黄金法则

$\frac{A}{B}$ 型计算式常用的速算方法有估算法、直除法、凑整法。

 破解密钥

基期量计算、比重计算、平均数计算、倍数计算、增长率计算,计算式类型均为 $\frac{A}{B}$ 型。

基期量的计算:

若已知现期量 A 及增长率 $a\%$, 则基期量 $A_0 = \frac{A}{1+a\%}$ 。若 $a\% \leq 5\%$, 可化除为乘进行估算; 若 $a\%$ 为特殊小数或接近特殊分数, 可采用凑整法速算;

倍数、增长率计算:

计算式均为 $\frac{A}{B}$, 可根据选项特点, 采用直除法、估算法、放缩法等进行速算;

比重、平均数计算:

均可分为两种类型, 一种是简单的 $\frac{A}{B}$, 采用直除法、估算法、放缩法进行速算; 另一种是分子或分母为多个数的和, 可根据选项特点, 采用截位法、凑整法、估算法等进行速算。

「魔力四射」

【例 1】(2010 年浙江)全年水资源总量 27127 亿立方米,比上年增加 7.4%;人均水资源 2048 立方米,增加 6.9%,全年平均降水量 659 毫米,增加 8.0%……那么,2007 年全年我国水资源总量约为()。

- A. 24780 亿立方米 B. 25258 亿立方米 C. 25730 亿立方米 D. 26120 亿立方米

【解析】本题考查基期量的计算。已知 2008 年全年水资源总量为 27127 亿立方米,增长率为 7.4%,则 2007 年的数据为 $\frac{27127}{1+7.4\%} < \frac{27127}{1.07} \approx 25352$ (亿立方米),答案应略小于 25352。因此,本题答案选择 B 项。

【例 2】(2010 年浙江)已知山东 2008 年度财政收入为 19570541 万元,2007 年财政收入为 16753980 万元。那么山东 2008 年度财政收入在 2007 年度基础上约增长了()。

- A. 16.8% B. 16.2% C. 15.9% D. 15.4%

【解析】本题考查增长率计算。由题干中数据可以得到计算式为: $\frac{19570541-16753980}{16753980} \approx \frac{1957-1675}{1675} = \frac{282}{1675} > \frac{280}{1680} = \frac{1}{6} \approx 16.7\%$ 。因此,答案选择 A 选项。

【例 3】(2010 年联考)最靠近赤道的四个城市,其年均降水量的均值为()。

- A. 1747 B. 1778 C. 1922 D. 2013.5

城市	新加坡	雅加达	胡志明	马尼拉
年均降水量(mm)	2150	1802	1861	1875

【解析】本题考查平均数计算。四城市年均降水量的均值 = $(2150+1802+1861+1875) \div 4 = 1800 + (350+2+61+75) \div 4 = 1922$ 。答案选择 C 选项。



通关自测

【练习 1】

2008 年我国职业技术培训机构基本情况

单位:人

项目	学校数(所)	注册学生人数	结业学生人数	教职工人数	# 专任教师
总计	162049	50195384	57209955	495848	252881

2008 年我国平均每所职业技术培训机构的结业学生人数约为()。

- A. 281 人 B. 310 人 C. 353 人 D. 403 人

【练习 2】

2010—2011 年外国入境旅游人数 单位:万人次

年份	2010	2011
外国入境旅游总人数	1693.25	2025.51

2011 年外国入境旅游总人数与 2010 年相比较()。

- A. 约提高了 19.6% B. 约提高了 2.7%
C. 约下降 12.1% D. 约下降 6.9%

通关自测

1. C 【解析】本题考查平均数计算。结合题干信息可得计算式为 $\frac{57209955}{162049} \approx \frac{5720}{16} = 350^+$ 。因此,答案选择 C 选项。

2. A 【解析】本题考查增长率计算。首先答案肯定是提高了,排除 CD 选项;根据增长率计算公式,可得计算式为 $\frac{2025-1693}{1693} = \frac{332}{1693} \approx 20\%$ 。因此,答案选择 A 选项。

题型(二):计算类之 $\frac{A}{B} \times C$ 型

黄金法则

现期量为 A , 增长率为 $a\%$, 则增长量 $= \frac{A}{1+a\%} \times a\%$ 。

破解密钥

基期和现期差值(增长量)的计算、两主体两期(基期、现期)差值变化, 计算类型均为 $\frac{A}{B} \times C$ 型。

5 个特殊分数要记忆: $\frac{1}{6} = 16.7\%$, $\frac{1}{7} = 14.3\%$, $\frac{1}{8} = 12.5\%$, $\frac{1}{9} = 11.1\%$, $\frac{1}{11} = 9.1\%$ 。

增长量的计算

增长量常用 $\frac{A}{1+a\%} \times a\%$ 来计算。方法为特殊分数法, 若 $a\% = \frac{1}{n}$, 则 $\frac{A}{1+a\%} \times a\% = \frac{A}{1+n}$; 若 $a\% < \frac{1}{n}$, 则 $\frac{A}{1+a\%} \times a\% < \frac{A}{1+n}$; 若 $a\% > \frac{1}{n}$, 则 $\frac{A}{1+a\%} \times a\% > \frac{A}{1+n}$ 。

两主体两期差值变化实质为增长量差值计算

若主体 I 现期量为 A , 增长率为 $a\%$, 主体 II 现期量为 B , 增长率为 $b\%$, 则两主体现期差值 $= A - B$, 基期差值 $= \frac{A}{1+a\%} - \frac{B}{1+b\%}$, 两期差值变化 $= (A - B) - (\frac{A}{1+a\%} - \frac{B}{1+b\%}) = \frac{A}{1+a\%} \times a\% - \frac{B}{1+b\%} \times b\%$, 计算时可结合选项, 采用直除法、估算法等进行速算。

魔力四射

【例 1】(2011 年国考)2010 年上半年, 全国成品油表观消费量 10963 万吨, 同比增长 12.5%, 同 2010 年上半年全国成品油表观消费量同比增加了约多少万吨? ()

A. 1009

B. 1218

C. 1370

D. 1787

【解析】 本题考查增长量计算。2010年全国成品油的表现消费量增长量 $= \frac{10963 \times 0.125}{1.125} = 10963 \times$

$$\left(\frac{1}{8} \div \frac{9}{8}\right) = \frac{10963}{9} \approx 1218. \text{ 因此, 答案选择 B 选项。}$$

【例 2】 2011年, 全国农村居民人均工资性收入 2963 元, 同比增长 21.9%。2011年全国农村居民人均工资性收入同比增加多少元? ()

- A. 831 B. 765 C. 649 D. 532

【解析】 本题考查增长量计算。2011年农村收入同比增加值 $= \frac{2963}{1+21.9\%} \times 21.9\%$, 因为 21.9% $< 25\%$, 所以 $\frac{2963}{1+21.9\%} \times 21.9\% < \frac{2963}{5} = 600^+$ 。因此, 答案选择 D 选项。

【例 3】 (2011年联考) 2010年某省限额以上企业零售额为 5833.9 亿元, 限额以下企业零售额为 7648.5 亿元。已知 2010年限额以上企业零售额增幅为 27.4%, 限额以下企业零售额增幅为 12.8%, 那么 2009年限额以上企业和限额以下企业零售额差值与 2010年差值相比 ()。

- A. 约少 386 亿元 B. 约多 386 亿元 C. 约少 647 亿元 D. 约多 647 亿元

【解析】 本题考查两主体两期差值变化计算。两期差值变化 $= 7648.5 \times \frac{12.8\%}{1+12.8\%} - 5833.9 \times \frac{27.4\%}{1+27.4\%} \approx 7648.5 \times \frac{1}{9} - 5833.9 \times \frac{1}{5} \approx 849.8 - 1166.78 = -317^+$, 2009年的差值比 2010年的差值多 317⁺。因此, 答案选择 B 选项。

通关自测

【练习 1】 2009年世界天然气贸易量达 8768.5 亿立方米, 较 2005 年增长 7.7%。其中俄罗斯是世界最大的管道天然气出口国, 占管道天然气总出口量的 27.8%, 出口量为 1764.8 亿立方米, 较 2008 年增长 14.3%。

2009年俄罗斯管道天然气出口较上年增长了多少亿立方米? ()

- A. 110 B. 221 C. 332 D. 443

【练习 2】2010 年一季度,我国水产品贸易进出口总量 158.7 万吨,进出口总额 40.9 亿美元,同比分别增长 14.2% 和 29.0%。其中出口量 67.1 万吨,出口额 26.5 亿美元,同比分别增长 11.7% 和 24.9%;进口量 91.6 万吨,进口额 14.4 亿美元,同比分别增长 16.0% 和 37.5%。

2010 年一季度,我国水产品出口额比上年同期约增长了多少亿美元?()

- A. 5.3 B. 7.0 C. 9.2 D. 21.2

自测答案

1. B 【解析】本题考查增长量计算。2009 年俄罗斯天然气出口比上年的增长量 = $\frac{1764.8}{1+14.3\%} \times 14.3\% = \frac{1764.8}{8} \approx 221$ 。因此,答案选择 B 选项。

2. A 【解析】本题考查增长量计算。2010 年水产品出口增长额 = $\frac{26.5}{1+24.9\%} \times 24.9\%$, 因为 24.9% 略小于 25%, 进而得出 $\frac{26.5}{1+24.9\%} \times 24.9\% \approx \frac{26.5}{5} = 5.3$ 。因此,答案选择 A 选项。



《教我如何不想他》的数学题

容易看出,式子里头的“他”是不能等于 5 的,否则,“何”也将等于 5,违反了约定。另外,“他”也不能等于 0.1 等,这也很容易看出来。“他”又不能等于 7,因为 $7 \times 7:49$,“何”将等于 9,进上一位 4,由于 $9-4=5$,但要使“想”的 6 倍等于 5,这是不可能的。这样逐一排除的结果,“他”只有唯一的可能性,即等于 6,“突破口”一旦找到,本题即可迎刃而解矣。

	他	何
	想	他
	不	想
	何	不
	如	何
	我	如
+	教	我
	何	何
	何	何
	何	何
	何	何

题型(三):计算类之 $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D}$ 型

黄金法则

$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D}$ 型计算类题目以基期的比重为代表,常用估算法、放缩法等进行速算。

破解密钥

题干给出了现期部分和整体的值,以及对应的增长率,求基期部分的比重,计算类型为 $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D}$ 。

基期比重计算:

若部分的现期量为 A ,增长率为 $a\%$,整体的现期量为 B ,增长率为 $b\%$,则部分的基期量 =

$\frac{A}{1+a\%}$,整体的基期量 = $\frac{B}{1+b\%}$,基期部分占整体

的比重 = $\frac{A}{1+a\%} \div \frac{B}{1+b\%} = \frac{A}{B} \times \frac{1+b\%}{1+a\%}$ 。

若增长率差别不大,则基期、现期比重差别不大。
若部分的增长率大于整体的增长率($a\% > b\%$),
则现期比重较大;反之,若部分的增长率小于整体
的增长率($a\% < b\%$),则现期比重较小。

魔力四射

【例1】(2011年国考)2008年,世界稻谷总产量68501.3万吨,比2000年增长14.3%;中国稻谷产量为19335万吨,增长率为1.9%,则2000年中国稻谷产量占世界稻谷总产量的比重约为()。

- A. 20% B. 24% C. 28% D. 32%

【解析】本题考查基期比重计算。2000年中国稻谷产量占世界稻谷总产量的比重为 $\frac{19335}{1.019} \div$

$\frac{68501.3}{1.143} = \frac{19335}{68501.3} \times \frac{1.143}{1.019} \approx \frac{19}{68} \times 1.1 = \frac{19+1.9}{68} \approx \frac{21}{68} > \frac{21}{75} = \frac{28}{100}$ 。答案选择D选项。

【例 2】(2010 年国考)2009 年 1—5 月移动长途通话总时长为 895.2 亿分钟,同比增长 28.4%,同期固定传统长途电话通话时长为 352.1 亿分钟,同比增长 -4.6%,则 2008 年 1—5 月,移动电话长途通话时长约是固定传统长途电话通话时长的多少倍? ()

- A. 3.4 B. 2.5 C. 1.9 D. 0.5

【解析】本题考查基期比重计算。由材料中的数据可以得到计算式为 $\frac{895.2}{352.1} \div \frac{1.284}{0.954} = \frac{895.2}{352.1} \times \frac{0.954}{1.284} \approx \frac{900}{360} \times \frac{1}{1.3} = \frac{5}{2.6} \approx 1.9$ 。答案选择 C 选项。

【例 3】2009 年北京市完成全社会固定资产投资 4858.4 亿元,比上年增长 26.2%。其中,基础设施投资 1462 亿元,增长 26%,主要投向交通运输和公共服务业,交通运输投资 698.6 亿元,增长 15.6%,公共服务业投资 434.5 亿元,增长 49%。

2008 年北京市交通运输投资额大约是公共服务投资额的多少倍? ()

- A. 1.6 B. 1.9 C. 2.1 D. 2.5

【解析】本题考查基期倍数计算。结合题干中的数据信息,可得计算式为 $\frac{698.6}{1+15.6\%} \div \frac{434.5}{1+49\%} \approx \frac{700}{435} \times \frac{150}{120} = \frac{700}{348} = 2^+$ 。因此,答案选择 C 选项。

通关自测

【练习 1】2010 年,某省广电实际总收入为 145.83 亿元,同比增长 32.07%。其中,广告收入为 67.08 亿元,同比增长 25.88%。2009 年,该省广告收入占广电总收入的比重约为 ()。

- A. 23% B. 26% C. 31% D. 48%

【练习 2】2010 年 1~5 月,石油石化行业实现利润 1645 亿元,同比增长 76.4%,上年同期为下降 35.4%。其中,石油天然气开采业利润 1319 亿元,同比增长 1.67 倍,上年同期为下降 75.8%。

2009 年 1~5 月,石油天然气开采业利润占石油石化行业实现利润的比重约为 ()。



- A. 53% B. 66% C. 80% D. 91%

【练习3】2011年8月份,社会消费品零售总额14705亿元,同比增长17.0%。其中,城镇消费品零售额12783亿元,同比增长17.1%。

2010年8月城镇消费品零售总额占社会消费品零售总额的()。

- A. 76% B. 87% C. 92% D. 82%

通关自测

1. D 【解析】本题考查基期比重计算。结合题干信息,得知2009年广告占广电总收入的比重为 $\frac{67}{146} \times \frac{1+32\%}{1+26\%} > \frac{67}{146}$, 而且 $\frac{67}{146}$ 的结果为 $40\%+$ 。因此,答案选择D选项。

2. A 【解析】本题考查基期量比重计算。结合题干信息,可得计算式为 $\frac{1319}{1645} \times \frac{1+76.4\%}{1+1.67\%}$, 其中 $\frac{1+76.4\%}{1+1.67\%} \approx \frac{1.8}{2.7} = 66.7\%$, 因为 $\frac{1319}{1645} < 1$, 所以答案一定小于 66% 。因此,答案选择A选项。

3. B 【解析】本题考查基期量比重计算。结合题干信息,可得计算式为 $\frac{12783}{14705} \times \frac{1+17\%}{1+17.1\%} \approx \frac{12783}{14705} \approx \frac{13}{15} = \frac{26}{30} \approx 87\%$ 。因此,答案选择B选项。



名人的生日

众所周知,名人、伟人都有不寻常的个人特性。如果你学代数,算一算他们的生日,你就会发现,所有的名人和伟人的生日都具有如下的一个特点:如爱因斯坦的生日是 1879 年 3 月 14 日,将年月日写在一起是 1879314。把这个数随意排列一下,可得到另一个数,比如:4187139。用大的数减去小的数得到一个差: $4187139 - 1879314 = 2307825$ 。将差的各个位数相加得到一个数, $2 + 3 + 0 + 7 + 8 + 2 + 5 = 27$,再将这个数的位数相加,其和是 9。即最后得到一个最大的一位数 9。按上述方法来计算数学家高斯的生日:高斯生于 1867 年 11 月 7 日,于是可得一个数 1867117,重新排列后的数比如是 1167781,差数为 $1867117 - 1167781 = 669336$,算其位数和可得: $6 + 9 + 9 + 3 + 3 + 6 = 36$,再算位数之和,最后得 $3 + 6 = 9$ 。同样,最后得到一个最大的一位数 9。

所有的著名人物的生日都有这样的特点。这是成为著名人物的“必要条件”。



题型(四):计算类之 $\frac{A}{B}-\frac{C}{D}$ 型

黄金法则

$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}$ 的运算较为复杂,以基期、现期比重差值为代表,往往采用估算法速算。

破解密钥

两主体基期量的差值、增长率的差值、增长量的差值、平均数的差值计算均属于 $\frac{A}{B}-\frac{C}{D}$ 型;基期、现期比重差值也属于 $\frac{A}{B}-\frac{C}{D}$ 型。

基期、现期比重差值

若部分的现期量为 A ,增长率为 $a\%$,整体的现期量为 B ,增长率为 $b\%$,则现期的比重= $\frac{A}{B}$,基期的比重= $\frac{A}{B} \times \frac{1+b\%}{1+a\%}$ 。两者差值= $\frac{A}{B} - \frac{A}{B} \times \frac{1+b\%}{1+a\%}$ 。

两主体基期量差值

若主体I的现期量为 A ,增长率为 $a\%$,主体II的现期量为 B ,增长率为 $b\%$,则两主体基期量的差值= $\frac{A}{1+a\%}-\frac{B}{1+b\%}$ 。若 $A>B$,且 $a\%<b\%$,则原式 >0 ;若增长率差别不大,现期量大则基期量大。

魔力四射

【例1】(2012年国考)2010年,我国出口贸易总额为15779.3亿美元,同比增长31.3%,其中高新技术产品出口4924.1亿美元,同比增长30.7%。2010年高新技术产品出口额占到出口总额的比重与上年相比约()。

- A. 增加了10个百分点
B. 减少了10个百分点
C. 增加了0.1个百分点
D. 减少了0.1个百分点

【解析】本题考查基期、现期比重差值计算。结合公式,部分的增长速度(30.7%)<整体的增长速度(31.3%),现期比重减小。但增速差别不大,两期比重差值很小,D选项符合要求。答案选择D选项。

【例 2】(2010 年国考)2009 年 4 月乘用车总销量为 83.1 万辆,其中 SUV、MPV 销量占 4 月份乘用车总销量的比重分别为 6%、2%,同比增长分别为 22.55%和-4.05%,2008 年 4 月,SUV 销量比 MPV 销量约()。

- A. 少 3.4 万辆 B. 少 2.3 万辆 C. 多 3.4 万辆 D. 多 2.3 万辆

【解析】本题考查基期量差值的计算。根据计算公式,差值 = $\frac{83.1 \times 6\%}{1 + 22.55\%} - \frac{83.1 \times 2\%}{1 - 4.05\%}$,观察可知,前项分子为后项分子的 3 倍,分母差别较小,故原式 > 0,排除 A、B。 $\frac{83.1 \times 6\%}{1 + 22.55\%} - \frac{83.1 \times 2\%}{1 - 4.05\%} < 83.1 \times 6\% - 83.1 \times 2\% = 3.324$,D 符合题意。答案选择 D 选项。

通关自测

【练习 1】2009 年,全年粮食产量 53082 万吨,比上年增长 211 万吨,增产 0.4%。其中,夏粮产量 12335 万吨,增产 2.2%;早稻产量 3327 万吨,增产 5.3%;秋粮产量 37420 万吨,减产 0.6%。

2009 年秋粮产量在全年粮食产量中的比重与上年相比()。

- A. 增加了 0.7 个百分点 B. 减少了 0.7 个百分点
C. 增加了 7 个百分点 D. 减少了 7 个百分点

【练习 2】

该省 2011 年 12 月及全年接待过夜旅客人数

项目	12 月份(万人次)	同比增长(%)	全年(万人次)	同比增长(%)
(二)过夜入境旅游者	10.54	56.1	81.46	22.8
1. 外国人	7.00	32.6	56.27	18.6

2011年12月该省入境外国旅游者占全年过夜入境外国旅游者的比重,较上年约增加()。

- A. 1.3% B. 14.2% C. 25.6% D. 32.6%

【练习3】2009年北京市完成全社会固定资产投资4858.4亿元,比上年增长26.2%。其中,国有内资单位完成投资2316.8亿元,比上年增长66.8%;非国有内资单位完成投资2096.4亿元,增长2.8%;外商及港澳台完成投资445.2亿元,增长5.9%。

与2008年相比,2009年国有内资单位完成的投资在北京市全社会固定资产投资总额中的比重()。

- A. 上升了12个百分点 B. 基本不变
C. 下降了17个百分点 D. 上升了41个百分点

通关自测

1. B **【解析】**本题考查两期比重差值计算。首先判定比重一定是下降了,因为部分-0.6%,整体增长率为0.4%,部分增长率小于整体增长率,排除AC选项。根据两期比重差值计算公式,可得计算式为 $\frac{37420}{53082} \times \frac{-0.6\% - 0.4\%}{1 - 0.6\%}$,结合选项分析答案一定小于1个百分点。因此,答案选择B选项。

2. A **【解析】**本题考查两期比重差值计算。根据公式,可得计算式为 $\frac{7}{56.27} \times \frac{32.6\% - 18.6\%}{1 + 32.6\%} < 14\%$,只有A选项符合要求。因此,答案选择A选项。

3. A **【解析】**本题考查两期比重差值计算。首先判定比重一定是上升了,因为部分增长率为66.8%,整体增长率为26.2%,部分增长率大于整体增长率,排除BC选项。结合基本公式,可得算式为 $\frac{2316}{4858} \times \frac{66.8\% - 26.2\%}{1 + 66.8\%}$,结果一定小于40.6%,只有A选项满足要求。因此,答案选择A选项。



百羊问题

一个牧羊人在赶羊，一过路人牵一只肥羊从后面跟了上来，问道：“你赶来的这群羊大概有一百只吧？”牧羊人答：“如果这群羊加上一倍，再加上原来这群羊的一半，又加上原来这群羊的四分之一，连你牵的这只肥羊也算进去，才刚好凑满一百只”。猜猜这群羊共几只。



题型(五):增长量大小比较

黄金法则

若量 A 的现期量为 A 和增长率均大于量 B , 则量 A 的增长量也应大于量 B 。

破解密钥

增长量计算公式: $\text{增长量} = \frac{\text{增长率} \times \text{现期量}}{1 + \text{增长率}} = \text{基数量} \times \text{增长率}$

设量 A 的现期量为 A , 增长率为 a , 量 B 的现期量为 B , 增长率为 b , 则二者的增长量分别为 $\frac{A}{1+a} \times a$ 和 $\frac{B}{1+b} \times b$ 。

(1) 若 $A > B$ 且 $a > b$, 则 $\frac{A}{1+a} \times a > \frac{B}{1+b} \times b$ 。

例如, 某市第二产业增加值 120 亿元, 同比增加 20%; 第三产业增加值为 110, 同比增加 10%, 则第二产业的增长量为 $120 \times \frac{20\%}{1+20\%} = 120 \times$

$(1 - \frac{5}{6}) = 120 \times \frac{1}{6}$, 第三产业增长量为 $110 \times \frac{10\%}{1+10\%} = 110 \times (1 - \frac{10}{11}) = 110 \times \frac{1}{11}$, 显然前者大于后者。

(2) 若 $A > B$ 且 $a < b$, 则二者的比值为 $(\frac{A}{1+a} \times a) \div (\frac{B}{1+b} \times b) = \frac{Aa}{Bb} \times \frac{1+b}{1+a}$, 此时无法得出具体大小关系, 应根据具体数值估计得出。例如, 北京市 2010 年进口额为 7532 亿美元, 同比增加 9.2%, 出口额为 5432 亿美元, 同比增加 18%, 此时进口额不到出口额的 1.5 倍, 而出口额的同比增长率约为进口额的 2 倍, 因此可得出进口额的增长量应小于出口额的同比增长量。

「魔力四射」

【例 1】(2012 年国考)2010 年,我国机电产品出口 9334.3 亿美元,同比增加 30.9%,高新技术产品出口 4924.1 亿美元,同比增长 30.7%。2010 年,机电产品进口额达到 6603.1 亿美元,同比增长 34.4%,高新技术产品进口额达到 4126.7 亿美元,同比增长 33.2%。则在 2010 年我国进出口贸易中,下列哪一项的同比增长金额最高?()

- A. 机电产品出口 B. 高新技术产品出口
C. 机电产品进口 D. 高新技术产品进口

【解析】在 2010 年的进出口贸易中,高新技术产品出口和高新技术产品进口的现期量和增长率均小于机电产品进口,因此其增长量也应小于机电产品进口,由此排除 B、D 两项。机电产品出口的增长量为 $\frac{9334.3}{130.9} \times 30.9 \approx \frac{9334}{4} = 2333^+$,机电产品进口的增长量为 $\frac{6603.1}{134.4} \times 34.4 \approx 50 \times 34.4 = 1720$ 。因此,本题答案选择 A 选项。

【例 2】(2011 年国考)2008 年世界稻谷总产量 68501.3 万吨,比 2000 年增长 14.3%;小麦总产量 68994.6 万吨,比 2000 年增长 17.8%;玉米总产量 82271.0 万吨,比 2000 年增长 39.1%;大豆产量 23095.3 万吨,比 2000 年增长 43.2%。则四种谷物中,2008 年与 2000 年相比全世界增产量最多的是()。

- A. 稻谷 B. 小麦 C. 玉米 D. 大豆

【解析】稻谷的增长量 = $\frac{68051.3 \times 0.143}{1.143} \approx 68000 \times \frac{1}{8}$,小麦的增长量 = $\frac{68994.6 \times 0.178}{1.178} \approx 69000 \times \frac{1}{7}$,玉米的增长量 = $\frac{82271 \times 0.391}{1.391} \approx 82000 \times \frac{2}{7}$,大豆的增长量 = $\frac{23095.3 \times 0.432}{1.432} \approx 23000 \times \frac{2}{7}$,可以看出玉米的增长量最大,因此答案选择 C 选项。

通关自测

【练习 1】

2009 年某省各类产品产量情况

	产量(万吨)	同比增长率(%)
粮食	1314.50	5.7
糖蔗	1116.11	3.4
油料	84.64	3.8
蔬菜	2567.17	5.6
水果	1061.89	8.0

下列作物 2009 年比 2008 年增产量最多的是()。

- A. 粮食 B. 糖蔗 C. 蔬菜 D. 水果

【练习 2】2010 年 1~3 月,法国对中国出口的前三大类产品为机电产品、运输设备和化工产品,出口额分别为 9.8 亿美元、8.4 亿美元和 4.0 亿美元,同比分别增长 14.9%、99.7%和 25.9%。

2010 年 1~3 月,法国对中国出口的各类产品中,出口额比上年同期增长最多的是()。

- A. 运输设备 B. 机电产品 C. 化工产品 D. 家具玩具(该项忽略)

【练习 3】2009 年,全年棉花产量 640 万吨,比上年减产 14.6%。油料产量 3100 万吨,增产 5.0%。糖料产量 12200 万吨,减产 9.1%。烤烟产量 280 万吨,增产 6.7%。茶叶产量 135 万吨,增产 7.1%。

与上年相比,下列农作物中 2009 年增产量最多的是()。

- A. 糖料 B. 烤烟 C. 茶叶 D. 油料

自测答案

1. C 【解析】本题考查增长量大小比较。比较大类题目,往往采用两两比较法。根据增长

量大小比较的口诀,粮食的产量和增长率均大于糖蔗,所以增产量一定大于糖蔗,排除 B 选项;粮食和蔬菜的增长率基本相同,但是产量远小于蔬菜,所以粮食的增产量一定小于蔬菜,排除 A 选项。蔬菜和水果的计算式为 $\frac{2567}{1+5.6\%} \times 5.6\%$, $\frac{1061}{1+8\%} \times 8\%$, 其中 $\frac{2567}{1+5.6\%} \times 5.6\% > \frac{2567}{20} = 100+$, $\frac{1061}{1+8\%} \times 8\% < \frac{1061}{11} = 90+$, 最多的是蔬菜。因此,答案选择 C 选项。

2. A 【解析】本题考查增长量大小比较。同样采用两两比较法,机电产品和运输设备的出口额相差不大,但是机电产品的增长率远远小于运输设备,所以运输设备的增产量肯定大于机电产品,排除 B 选项;同样的方法排除 C 选项。运输设备的增产量计算式为 $\frac{8.4}{1+99.7\%} \times 99.7\% \approx \frac{8.4}{2} = 4.2$, 因此,答案选择 A 选项。

3. D 【解析】本题考查增长量大小比较。首先排除 A 选项,因为糖料在减少。同样采用两两比较法,油料,茶叶和烤烟的增长率是差不多的,但是油料的总量遥遥领先,所以最大的一定是油料。因此,答案选择 D 选项。

题型(六):增长率大小比较

黄金法则

若增长周期数相同,增长率大小比较一般用 $\frac{\text{现期量}}{\text{基期量}}$ 代替增长率进行大小比较。

破解密钥

增长率大小比较,一般遵循的思路是:先比较数量级,然后比较首位,最后用直除法或化同法、差分法等比较大小。

普通增长率大小比较:

普通增长率大小比较是相对年均增长率而言的,一般用现期量与基期量的比值来代替增长率进行比较,使用方法通常是估算法、直除法、插值法、放缩法等。

平均增长率大小比较:

平均增长率大小比较分为增长周期数相同和增长周期数不同两种情况。

(1)若增长周期数相同,只需比较现期量与基期量的比值即可。例如,某省2001年,三大产业的产值分别为100、180、400亿元,2010年的产值分别为240、360、750亿元,因为 $\frac{240}{100} > \frac{360}{180} > \frac{750}{400}$,所以三大产业年均增长率大小排序为第一产业 > 第二产业 > 第三产业。

(2)若周期数不同,在增长率较小的情况下,可以近似估算求值;若不容易求值,也可以直接比较。例如,某省棉花的产量从2001年的100万吨增加到2008年的300万吨,而甘蔗的产量则从2003年的50万吨增加到2008年的100万吨,则棉花的年均增长率为 $\sqrt[7]{3}-1$,甘蔗的年均增长率为 $\sqrt[5]{2}-1$,此时只需要比较 $\sqrt[7]{3}$ 和 $\sqrt[5]{2}$ 的大小即可, $(\sqrt[7]{3})^{35} = 3^5 = 243$, $(\sqrt[5]{2})^{35} = 2^7 = 128$, $243 > 128$,因此 $\sqrt[7]{3} > \sqrt[5]{2}$,即棉花的年均增长率大于甘蔗。

魔力四射

【例 1】以下是某市 2003 至 2004 年 2—9 月的固定资产投资额情况。单位(亿元)

	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月
2004 年	142.7	155.5	168.3	182.3	223.2	198.1	213.8	241.2
2003 年	97.2	121.3	133.1	156.9	205.9	178.9	176.1	245.1

从上表可知,两年中投资规模同比增长速度最快的是()。

- A. 2004 年 2 月 B. 2004 年 3 月 C. 2004 年 6 月 D. 2004 年 8 月

【解析】本题考查增长率大小比较。增长率大小比较可以用比较 $\frac{\text{现期量}}{\text{基期量}}$ 代替增长率进行,则本题相当于比较 $\frac{142}{97}, \frac{155}{121}, \frac{223}{206}, \frac{213}{179}$ 的大小,通过观察发现,A 选项的分子分母之差最大,且 A 选项的分母是最小的,所以 A 选项是最大的。因此,答案选择 A 选项。

【例 2】2009 年第四季度,某地区实现工业增加值 828 亿元,同比增加 12.5%。在第四季度的带动下,全年实现的工业增加值达到 3107 亿元,增长 8.7%。请问该地区前三季度工业增加值同比增长率为()。

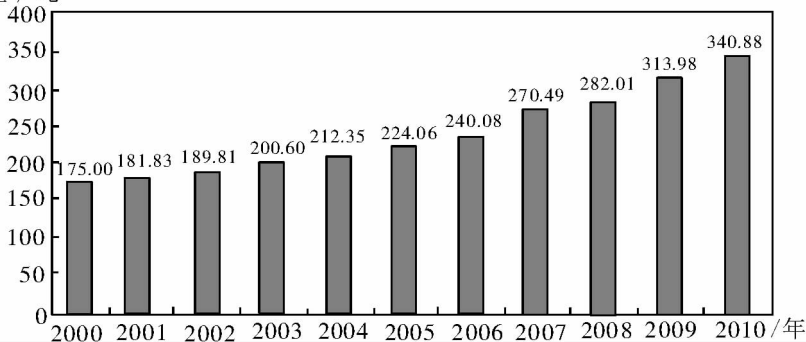
- A. 7.4% B. 8.8% C. 9.6% D. 10.7%

【解析】本题考查增长率大小比较。全年增长率一定介于前三季度和第四季度增长率之间,即整体增长率大小一定是居中的,在本题中,全年增长率为 8.7%,第四季度增长率为 12.5%,因此前三季度的增长率一定小于 8.7%。因此,答案选择 A 选项。

【例 3】(2012 年山东)下图是 2000—2010 年我国黄金产量状况图,则以下哪一年黄金产量同比增速最快?()

- A. 2007 年 B. 2008 年 C. 2009 年 D. 2010 年

产量 / 吨



2000—2010 年我国黄金产量状况图

【解析】2007 年的增长率为 $\frac{270.49-240.08}{240.08} = \frac{30.41}{240.08}$, 2008 年的增长率为 $\frac{282.01-270.49}{270.49} = \frac{11.52}{270.49}$, 2009 年的增长率为 $\frac{313.98-282.01}{282.01} = \frac{31.97}{282.01}$, 2010 年的增长率为 $\frac{340.88-313.98}{313.98} = \frac{26.90}{313.98}$, 显然很容易发现 $\frac{11.52}{270.49}$ 和 $\frac{26.90}{313.98}$ 都是小于 $\frac{30.41}{240.08}$ 的, 因此可排除 B、D 两项。 $\frac{30.41}{240.08} > \frac{30.01}{240.08} = \frac{1}{8}$, 而 $\frac{31.97}{282.01} < \frac{35}{280} = \frac{1}{8}$, 故 $\frac{30.41}{240.08} > \frac{31.97}{282.01}$ 。因此, 本题答案选择 A 选项。

通关自测

【练习 1】

江西省各设区市县城镇居民人均可支配收入和人均消费性支出情况(单位:元)

地区	2009 年		2010 年	
	人均可支配收入	人均消费性支出	人均可支配收入	人均消费性支出
南昌	16472	12406	18276	13899
新余	15610	12351	17358	12709
吉安	14095	8306	15547	8893
抚州	13119	6697	14445	7474

2010 年城镇居民人均消费性支出增幅最小的是()。

- A. 南昌 B. 新余 C. 吉安 D. 抚州

【练习 2】2011 年某省接待过夜游客总量再次实现突破,达到 3001.34 万人次,同比增长 16.0%,实现旅游收入 324.04 亿元,同比增长 25.8%。12 月份宾馆平均开房率为 74.02%,同比增长 0.06%;全年累计宾馆平均开房率为 62.37%,同比增长 2.0%。

表 1 该省 2011 年 12 月及全年接待过夜旅客人数

项目	12 月份(万人次)	同比增长(%)	全年(万人次)	同比增长(%)
旅游饭店接待过夜人次	235.27	18.32	2123.51	14.33
过夜入境旅游者	10.54	56.1	81.46	22.8

表 2 该省 2011 年 12 月及全年接待过夜游客的旅游收入情况

项目	12 月份(亿元)	同比增长(%)	全年(亿元)	同比增长(%)
接待过夜游客旅游总收入	33.94	37.6	324.04	25.8

下列 2011 年 1—11 月该省旅游统计数据中,同比增长速度大于全年的是()。

- A. 接待过夜境内旅游者收入
- B. 宾馆平均开房率
- C. 旅游饭店接待过夜的境内游客人数
- D. 接待过夜入境旅游者人数

通关自测

1. B 【解析】本题考查增长率大小比较。通过观察可以发现,新余的人均消费支出变化量最小,且总量比较大,因此增长率一定是最小的。因此,答案选择 B 选项。

2. B 【解析】本题考查增长率大小比较。总体增长率是居中的,分析题干发现,宾馆平均开房率 12 月份的增长率为 0.06%,全年增长率为 2.0%, $0.06% < 2.0%$,所以 1—11 月份的增长率一定大于全年。因此,答案选择 B 选项。

题型(七):比重大小的比较

黄金法则

部分的增长率大于总体,则部分占总体的比重增大;部分的增长率小于整体,则部分占总体的比重减小。

破解密钥

比重的比较主要包括两类,一种是简单的比重比较,一种是基期和现期的比重比较。

简单的比重比较:

简单的比重比较,如 $\frac{A}{B}$ 和 $\frac{C}{D}$ 的大小比较,在资料分析中考查较多,一般运用估算法、直除法、放缩法、插值法、差分法等方法进行比较。

基期、现期的比重比较:

基期、现期的比重比较是指某一部分占整体的现期的比重与基期的比重进行比较。有的出现在综合分析题的一个选项中。分析时,可只比较增长率的大小,若部分的增长率大于总体,则现期的比重大于基期比重;若部分的增长率小于整体,则现期的比重小于基期比重。

魔力四射

【例 1】(2012 年山东)下表是某市 2009 年旅游部门主要财务情况,则以下哪一类旅游部门 2009 年的经营利润占当年营业收入的比重最高? ()

- A. 宾馆、酒店 B. 景点 C. 旅行社 D. 其他旅游企业

指标	宾馆、酒店	旅行社	景点	其他旅游企业
营业收入	722581	659313	239717	6342
经营利润	214594	25735	101714	445

【解析】 本题考查简单比重的比较,根据表格可以看出,只有景点的经营利润占当年营业收入的比重超过 $\frac{1}{3}$,因此比重最高的是景点。因此,本题答案选择B选项。

【例2】 (2010年国考)国内乘用车2009年4月销售量达到83.1万辆,比3月份增长7.59%,其中,轿车销量比3月份增长8.3%。轿车销量占4月份乘用车总销量的比重为71%。则关于2009年3月份轿车销量在总销量中所占比重的描述,以下正确的是()。

- A. 轿车低于71% B. 轿车等于71% C. 轿车超过71% D. 无法判断

【解析】 本题考查基期和现期比重的比较,轿车的同比增速大于乘用车的增速,则现期的比重大于基期的比重。现期的比重为71%,则基期的比重一定小于71%。因此,本题答案选择A选项。

通关自测

【练习1】

2008年我国职业技术培训机构基本情况

单位:人

项目	学校数(所)	注册学生人数	结业学生人数	教职工人数	#专任教师
职工技术培训学校(机构)	3385	2675288	2693125	44962	32412
教育部门 and 集体办	1318	1033272	1048307	24640	18620
民办	1055	303568	307866	8939	6392
农村成人文化技术培训学校(机构)	137827	36948254	43582242	218263	100725
民办	930	261998	264449	3622	2294
其他培训机构(含社会培训机构)	20837	10571842	10934588	232623	119744
其他部门办	2386	1679721	2032370	19321	13158

2008年,教职工中专任教师比重最高的是以下哪种职业技术培训机构?()

- A. 教育部门和集体办职工技术培训学校(机构)
 B. 民办职工技术培训学校(机构)
 C. 民办农村成人文化技术培训学校(机构)
 D. 其他部门办其他培训机构(含社会培训机构)

【练习 2】2009 年江苏省实现地区生产总值 34061.19 亿元,比上年增长 12.4%……2009 年江苏省规模以上工业实现增加值 16727.1 亿元,增长 14.6%……全年民营工业实现增加值 8288.8 亿元,增长 18.9%,增幅同比提高 4.2 个百分点。

与 2008 年相比,2009 年江苏省民营工业实现增加值在全省地区生产总值中所占比重()。

- A. 无法确定 B. 上升了 C. 下降了 D. 不变

自测答案

1. A 【解析】本题考查简单比重比较。题干中的数据非常的大,因此在进行列式过程中,可以通过截位进行简化计算,选项所对应的比重列式为:

$$\frac{18}{24} = 75\%, \frac{64}{89} = 70\%+, \frac{23}{36} = 70\%-, \frac{13}{19} = 70\%-,$$

明显发现 A 选项最大。因此,答案选择 A 选项。

2. B 【解析】本题考查两期比重大小比较。分析题干信息得知,18.9% > 12.4%,即部分增长率大于整体增长率,所以与 2008 年相比,比重是在上升的。因此,答案选择 B 选项。



数不知总

“今有数不知总,以五累减之无剩,以七百十五累减之剩十,以二百四十七累减之剩一百四十,以三百九十一累减之剩二百四十五,以一百八十七累减之剩一百零九,问:总数若干?”





数学典故参考答案及解析

奇怪的遗嘱

【解析】因为 18 正好能被 2、3、9 整除。 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$, 兄弟三人恰好分掉 18 头牛中的 17 头, 剩下 1 头牛归还。

托尔斯泰最欣赏的一道数学题

【答案】8 人

【解析】设大草地的面积为 3, 则小草地的面积为 1.5, 一半人工作半天的效率为 1, 小草地第一天还剩下的面积为 $1.5 - 1 = 0.5$, 这需要一个人 1 天割完。第一天总共割完的面积为 4, 则总人数为 $4 \div 0.5 = 8$ 人。

国王赏麦

【答案】 $2^{64} - 1$

【解析】第一格 1 粒, 后面每一格是前一格的两倍, 构成公比为 2 的等比数列, 则所有项求和为 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$ 。

诸葛亮的神机妙算

【解析】 $1024 = 2^{10}$, 诸葛亮每问一次, 数字可排除一半, 数字的范围缩小一半。问完十次后, 只剩下一个数字, 从而可得出谋士所想的数字。

百鸡问题

【答案】 4、18、78、8、11、81 或者 12、4、84。

【解析】 设鸡翁、鸡母、鸡雏分别为 x 、 y 、 z 只, 可得
$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \end{cases}$$
, 可解得不定方程组的解

$$\text{为 } \begin{cases} x=4 \\ y=18 \\ z=78 \end{cases}, \begin{cases} x=8 \\ y=11 \\ z=81 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} x=12 \\ y=4 \\ z=84 \end{cases}.$$

丢番图的墓志铭

【答案】 84 岁

【解析】 设丢番图活了 x 岁, 则可得 $x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4$, 解得 $x = 84$ 。

生日巧合

【解析】 每个人生日有 365 种可能, 则 50 个人的生日可能情况总数为 365^{50} , 而 50 个人生日不同的情况数为 A_{365}^{50} , 概率为 $\frac{A_{365}^{50}}{365^{50}}$, 约为 3%, 即至少有两人生日相同的概率为 $1 - \frac{A_{365}^{50}}{365^{50}}$, 约为 97%。

数学家维纳的年龄

【答案】 18

【解析】 设维纳的年龄是 x , 首先 x 的立方是一个四位数, 这确定了一个范围。10 的立方是 1000, 21 的立方是 9261, 22 的立方是 10648; 所以 $10 < x \leq 21$ 。 x 的四次方是个六位数, 17 的四次方是 83521 不是六位, 18 的四次方是 104976 是六位数, 21 的四次方是 194481, 因此可得出 $18 \leq x \leq 21$ 。 20 的立

方是 8000, 有重复; 21 的四次方是 194481, 也有重复; 19 的四次方是 130321; 也有重复; 18 的立方是 5832, 18 的四次方是 104976, 都没有重复。所以, 维纳的年龄应是 18。

田忌赛马

【解析】(1) 田忌的马按下上中顺序出阵确定会赢; (2) 田忌的马出阵顺序共有 6 种: 上中下(败); 下上中(胜); 中下上(败); 中上下(败); 下中上(败); 上下中(败)。所以随机出阵的话, 田忌获胜的概率只有 $1/6$ 。

智斗猪八戒

【解析】10 个人次序总是不同的方法数为 $A_{10}^{10} = 3628800$, 每天 3 顿饭, 每年 365 天, 相当于需要 $\frac{3628800}{3 \times 365} \approx 3300$ 年才能吃到免费饭菜。

古寺有多少僧人

【答案】 624

【解析】 设古寺有 x 名僧人, 则可得 $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 364$, 解得 $x = 624$ 。

数学家的遗嘱

【答案】 儿子得 $\frac{4}{7}$, 妻子得 $\frac{2}{7}$, 女儿得 $\frac{1}{7}$ 。

【解析】 儿子所得遗产应是妻子的两倍, 妻子的遗产应是女儿的两倍, 则三人所得遗产的比值为 $4 : 2 : 1$, 应此遗产分配应是儿子得 $\frac{4}{7}$, 妻子得 $\frac{2}{7}$, 女儿得 $\frac{1}{7}$ 。

聪明青年智当女婿

【解析】以公主为首,偶数出列,则去掉公主便是奇数项出列,最后剩下的一定是2的最高次方,100以内2的最高次方是 $2^6=64$ 可以留下,即以公主为首的队列中,65号一定可以留下。

《教我如何不想他》的数学题

【答案】1572836

【解析】当“他”=6时,可得出“何”=2,则(6“想”+4)的尾数应为2,则“想”应为3或者8。当“想”=8时,(5“不”+5)的尾数为5或0,不可能是2,排除,因此“想”=3。此时((5“不”+2)的尾数为2,则“不”应为偶数,再根据前一列的尾数可判断出“不”=8。依此类推,可得出“教”=1,“我”=5,“如”=7。

百羊问题

【答案】36只

【解析】设这群羊共有 x 只,则可得 $x+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+1=100$,解得 $x=36$ 。

数不知总

【答案】10020

【解析】所求数字为5的倍数,且数字除以391的余数为245,则商也应该是5的倍数,因此数字应满足的条件为 $1955n+245$,代入 $n=0,1,2,3\cdots$,验证可得,当 $n=5$ 时,符合所有条件,此时数字为 $1955\times 5+245=10020$ 。